ELEMENTOS DE CALCULO NUMERICO

Práctica 4

1^{er} Cuatrimestre 2003

Ejercicio 1 Usar el método de bisección para hallar una raíz positiva de la ecuación trascendente:

$$2x = \tan(x)$$

¿Cuantos pasos hay que hacer para garantizar que el error es menor que 10^{-5}?

Ejercicio 2 Hallar una raíz de

$$2x^3 + x - 2 = 0$$

usando el método de Regula-Falsi (comenzando con [0,1]).

Ejercicio 3 Calcular $\sqrt{2}$ por los métodos de bisección y Newton, con dos decimales significativos.

Ejercicio 4 Sea $f(x) = x^\alpha$, con $\alpha > 0$. Analizar para qué valores de α el método de Newton es convergente, y para cuales no, comenzando con $x_0 \neq 0$.

Ejercicio 5 Dada $f(x) = x^3 - 2x - 5$ se desea hallar x^* la única raiz real de $f(x)$. Dado x_0 una primer aproximación a la raíz si escribimos $x^* = x_0 + e_0$, se tiene que e_0 es la solución a la ecuación

$$(x_0 + e_0)^3 - 2(x_0 + e_0) - 5 = 0 \qquad (1)$$

i) Observar que si en (1) se descartan los términos que involucran potencias de e_0 de orden mayor o igual que 2 se obtiene una ecuación lineal cuya solución c_0 está dada por $c_0 = \frac{-x_0^3+2x_0+5}{3x_0^2-2}$.
Una nueva aproximación a x^* se tiene tomando $x_1 = x_0 + c_0$.
ii) Escriba $e_0 = c_0 + e_1$, reemplace en la ecuación (1) y descarte los términos que involucran potencias de e_1 mayores o iguales que 2 y resuelva la ecuación lineal resultante a cuya solución llamamos c_1. La nueva aproximación a la raíz x^* está dada por $x_2 = x_1 + c_1$.
Repita este proceso para obtener una sucesión $x_{n+1} = x_n + c_n$ que aproxime a x^*.
iii) Observe que la sucesión obtenida en ii) coincide con la sucesión de Newton- Raphson (i.e $c_j = -f(x_j)/f'(x_j)$).
iv) Aplique el algoritmo comenzando con $x_0 = 2$ e itere hasta que $|f(x_j)| < tol$ o $|x_{j+1} - x_j| < tol$ con $tol = 10^{-5}$.

Ejercicio 6 Considere la función $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. Diga para qué valores de x_0 la iteración de Newton es convergente, para cuales es divergente, y cuando se obtienen ciclos periódicos.

Ejercicio 7 Resolver $\cos(x) = x$, $x > 0$.
a) Utilizar la iteración de punto fijo $x_{n+1} = \cos(x_n)$ (muy simple de realizar en la calculadora).
b) Utilizar el método de Newton.
c) Con el método de bisección, comenzando con el intervalo $[0, \pi]$.
¿Cuál converge más rápido?

Ejercicio 8 *(Algoritmo de Horner)* Una forma económica de evaluar un polinomio

$$p(x) = \sum_{0}^{N} a_n x^n$$

es la siguiente:

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + \cdots + x(a_{N-1} + x a_N))) \cdots)$$

Calcular cuantas sumas y productos se realizan de esta manera, y comparar con el método ingenuo de calcular cada una de las potencias, multiplicar por los coeficientes, y luego sumar. Piense como podrían calcularse también las derivadas de $p(x)$ con este esquema.

Ejercicio 9 Un método posible para calcular las raíces de un polinomio, es calcular primero una raíz x_1 por el método de Newton, dividir luego el polinomio por $(x - x_1)$, volver a calcular una raíz por el algoritmo de Newton, y continuar así hasta obtener una cuadrática que se puede resolver con la expresión explícita de las raíces. Aplique esta idea a

$$p(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

Observe los riesgos que se corren.

Ejercicio 10 Hallar una raíz de

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

utilizando
a) Método de Newton ($x_0 = 0$)
b) Método de bisección
c) Método de la secante.
¿Cuál converge más rápido?

Ejercicio 11 Considere la función definida según:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x)\ \exp(-\frac{1}{x^2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Hallar la raíz en 0 por el método de Newton. ¿Qué puede decir de la convergencia? Compárelo con el método de bisección. ¿Qué pasa con la iteración $x_{n+1} = f(x_n)$?

Ejercicio 12 Dada la función

$$f(x) = e^{-3x} - \frac{x}{2}$$

a) Demuestre que f tiene una única raíz.
b) Demuestre que cualquiera sea el x_0 inicial la sucesión generada por Newton-Raphson $x_1, \cdots, x_n, \cdots$ es monótona creciente acotada superiormente por la raíz y concluya la convergencia. ¿Con qué orden converge?.

Ejercicio 13 Sea f una función suave, y a tal que $f(a) = 0$, y $f'(a) \neq 0$.
i) Suponiendo que en $(a, b]$, f, f', f'' son positivas, probar que la iteración de Newton generada a partir de $x_0 \in (a, b)$ converge decrecientemente hacia a.
ii) Con las mismas hipótesis, si $x_1 \in (a, x_0)$, probar que la sucesión generada por el método de la secante a partir de x_0, x_1 converge decrecientemente hacia a.

Ejercicio 14 Sea $f(x) = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)$ donde $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$. Probar que si $x_0 > c_n$ la sucesión de Newton-Raphson converge a c_n

Ejercicio 15 Hallar un α tal que

$$\int_0^\alpha \cos(x)dx + \alpha = 1$$

Utilice el algoritmo de Newton para una función adecuada. Observe que si sabe calcular numéricamente la integral, no necesita hallar una forma explícita para la misma.

Ejercicio 16 Ver que una raíz múltiple de un polinomio f es raíz simple de f/f'. Aplicar el método de Newton a $f(x)$ y a $f(x)/f'(x)$ para hallar la raíz múltiple, donde

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)^2$$

¿Qué observa?

Ejercicio 17 Suponga que la función suave f tiene una raíz de orden 2 en x_0.
i) Demuestre que el método de Newton converge sólo linealmente a x_0.
ii) ¿Cuál es el orden de convergencia de la siguiente modificación:

$$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad ?$$

Aclare cuidadosamente los requerimientos de suavidad que necesita para f.

Ejercicio 18 Suponiendo que $g'(x)$ es continua en $[s, b]$, donde s es un punto fijo de $g(x)$. Suponiendo también que $0 \leq g'(x) \leq K < 1$ para todo $x \in [s, b]$. Demostrar la iteración comenzando con $x_0 \in [s, b]$ converge decrecientemente a s.

Ejercicio 19 Dada la función $f(x) = x + 1/x - 2$, $f : \mathbb{R} > 0 \to \mathbb{R}$, se construye el siguiente algoritmo para aproximar la raíz $r = 1$:

$$x_{n+1} = 2 - 1/x_n$$

i) Verifique que si $x_0 > 1$ entonces la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente por 1. Concluya que $x_n \to 1$. ¿Es lineal la convergencia?.
ii) ¿Se le ocurre un algoritmo para aproximar la raíz de f que converja cuadráticamente?

Ejercicio 20 Sea $g(x) = x^2 - 2x + 2$. ¿Cuáles son los puntos fijos de $g(x)$? Para cada punto fijo s, determine si existe un entorno tal que la iteración comenzando con cualquier punto de dicho entorno converge al punto fijo. ¿Cuál es el orden de convergencia en los casos en que converge?

Ejercicio 21 Sea $F(x) = \frac{x(x^2+3R)}{3x^2+R}$ con $R > 0$
i)Verificar que $\sqrt{R}$ es un punto fijo F
ii)Demostrar que el método de punto fijo $x_{n+1} = F(x_n)$ converge a $\sqrt{R}$ si se comienza con x_0 suficientemente próximo.
iii)¿Cuál es el orden de convergencia ?