

ELEMENTOS DE CALCULO NUMERICO

Práctica 5

1^{er} Cuatrimestre 2003

Ejercicio 1 Para cada uno de los conjuntos de datos dados, calcular el polinomio $p(x)$ interpolador de grado menor o igual que 3, en la forma de Lagrange. Verifique utilizando el comando **polyfit** de Matlab. Grafique el polinomio interpolador, usando el comando **polyval**.

x	-1	0	2	3
y	-1	3	11	27

x	-1	0	1	2
y	-3	1	1	3

Ejercicio 2 Repetir el problema anterior, usando el método de coeficientes indeterminados.

Ejercicio 3 Construir la tabla de diferencias divididas para los datos del Ejercicio 1, y emplearla para construir el polinomio interpolador. Evaluar $p(-2)$.

Ejercicio 4 Agregar a las tablas de datos del Ejercicio 1 el punto $x = 4$, $y = 1$. Aumentar la tabla de diferencias divididas, y evaluar el polinomio interpolador de grado 4 en $x = -2$.

Ejercicio 5 Utilizar el método de coeficientes indeterminados para hallar un polinomio de grado 2, $p(x)$, que satisfaga:

$$p(1) = 0, \quad p'(1) = 7, \quad p(2) = 10$$

Ejercicio 6 Escribir una subrutina que en base a dos vectores de n datos, x e y , evalúe el polinomio que interpola dichos datos en un punto α .

Ejercicio 7 Considere la función $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ en el intervalo $[-1,1]$. Evalúe numéricamente los polinomios que interpolan la función en $n+1$ puntos equiespaciados $x_0 = -1, \dots, x_i = x_0 + \frac{2i}{n}, \dots, x_n = 1$, para $n = 5, 10, 15$. ¿Qué observa?. Compare con la figura.

Ejercicio 8 Suponga que para la función $f(x)$ en el intervalo I es válida la acotación:

$$f^{(n+1)}(x) \leq C^{n+1}(n+1)!$$

Encuentre un rango de valores de la constante C que garantice que el polinomio interpolador de grado n que interpola en $n+1$ puntos equiespaciados converja a la función cuando n tiende a ∞ .

Ejercicio 9 Sea $f(x) = \frac{1}{a+x}$, $x \in [-1, 1]$ Sean $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ una sucesión arbitraria de puntos en $[-1, 1]$ y $P_n(x)$ el polinomio que interpola a $f(x)$ en $x_0, x_1, \dots, x_n$. Demostar que si $a > 3$ entonces $P_n(x)$ converge a $f(x)$

Ejercicio 10 Dibujar el polinomio $W_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, donde $x_i = -1 + 2i/n$, e $i = 0, \dots, n$ ($n+1$ puntos equiespaciados en el $[-1, 1]$). Dibujar ahora el polinomio $W_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, donde x_i son los ceros del polinomio de Chebyshev de grado $n+1$. Comparar.

Ejercicio 11 Repetir el Ejercicio 7 usando los polinomios que interpolan a la función en los ceros del polinomio de Chebychev de grado $n+1$, para $n = 5, 10, 15$.

Ejercicio 12 Calcular el desarrollo de Taylor de e^x reteniendo términos que garanticen que en el intervalo $[-1, 1]$ el error sea menor que 10^{-10} . Escribir las potencias de x en términos de los polinomios de Chebychev, y determinar cuántos polinomios de Chebychev es necesario retener para mantener el error.

Ejercicio 13 Determinar el grado mínimo n que debe tener un polinomio que interpola en los ceros de T_{n+1} a la función $f(x) = e^{3x}$, $x \in [-1, 1]$, para que el error $\|f - p\|_\infty \leq 10^{-10}$.

Ejercicio 14 Dada la función $f(x) = \frac{1}{(2+x)^2}$, considere el polinomio P_n que la interpola en puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$ pertenecientes al $[0, 1]$.

a) Demuestre que

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{n+2}{2^{n+2}} \|w\|_\infty$$

donde $\|w\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} \prod_{j=0}^n |x - x_j|$

b) ¿Cómo elegiría $x_0, x_1, \dots, x_n$ de manera que $\|w\|_\infty$ sea mínima?

c) Estime en cuántos puntos bastaría interpolar para tener error $< 10^{-3}$. al aproximar $f(x)$ por $P_n(x)$ cualquiera sea $x \in [0, 1]$.

Ejercicio 15 Para ilustrar qué pasa cuando se desea interpolar no solo una función sino sus derivadas, considere los siguientes 3 problemas.

a) Hallar p de grado a lo sumo 3 tal que $p(0)=1$, $p'(0)=1$, $p'(1)=2$, $p(2)=1$

b) Hallar p de grado a lo sumo 3 tal que $p(-1)=1$, $p'(-1)=1$, $p'(1)=2$, $p(2)=1$

c) Hallar p de grado a lo sumo 3 tal que $p(-1)=1$, $p'(-1)=-6$, $p'(1)=2$, $p(2)=1$

Usando el método de coeficientes indeterminados, demuestre que el problema a) tiene solución única, el problema b) no tiene solución, y el problema c) tiene infinitas.

Ejercicio 16 Analizar para qué valores de x_0, x_1, x_2 , y $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ existe un polinomio de grado 2 que satisfaga:

$$p(x_0) = \alpha_0, \quad p(x_1) = \alpha_1, \quad p'(x_2) = \alpha_2$$

Ejercicio 17 Sea $f \in C^1([a, b])$. Escriba el polinomio de grado menor o igual que 2, $P_{x_0, x_1, x_2}(x)$, que interpola a $f(x)$ en tres puntos distintos x_0, x_1 y x_2 . Si se define la función Q por

$$Q(x) = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} P_{x_0, x_1, x_2}(x)$$

pruebe que Q es el polinomio de interpolación de Hermite que satisfasce $Q(x_0) = f(x_0)$, $Q(x_1) = f(x_1)$ y $Q'(x_1) = f'(x_1)$.

Ejercicio 18 Sea $f \in C^2[a, b]$, y sean $x_0 = a, x_1 = a + h, \dots, x_n = b$, donde $h = (b - a)/n$. Considere la poligonal $l(x)$ que interpola a f en los puntos $x_i, i = 0 \dots n$. Probar que

- i) $|f(x) - l(x)| \leq \frac{h^2}{2} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$
- ii) $|f'(x) - l'(x)| \leq h \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$