ELEMENTOS DE CALCULO NUMERICO

Práctica 6

1^{er} Cuatrimestre 2003

Ejercicio 1 Encontrar el polinomio de grado 1 que aproxime en el sentido de cuadrados mínimos la siguiente tabla de datos:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	-0.1	1.1	1.9	3.2	3.8	5	6	7.3	8.1	8.9

Compárelo con el polinomio interpolador de grado 10. ¿Comprende la utilidad de la aproximación de cuadrados mínimos cuando se interpolan tablas de datos, por ejemplo experimentales, en las cuales cada magnitud tiene su error? Suponga que desea hallar la derivada de y respecto de x, y piense cómo lo haría.

Ejercicio 2 (Para hacer en Matlab) Genere 11 datos tomando $t_i = \frac{i}{10}$ y $y_i = \text{erf}(t_i)$, $i = 0, \ldots, 10$. Para ello, búsquelos en una tabla, o bien utilice el desarrollo en serie:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}$$

i) Ajuste en el sentido de cuadrados mínimos a dichos datos con polinomios de grados 1, 2,..., 10, y calcule el error para algunos valores de x entre los t_i. Observe la dependencia del error con el grado del polinomio.
ii) Los polinomios no aproximan especialmente bien funciones como $\text{erf}(x)$, pues son no acotados para x grande, si el grado es mayor que cero, mientras que la función error tiende asintóticamente al valor 1 cuando $x \to \infty$. Utilizando los mismos puntos, halle la aproximación de cuadrados mínimos que utiliza el siguiente modelo:

$$\text{erf}(t) \sim c_1 + \exp(-t^2)(c_2 + c_3 z + c_4 z^2 + c_5 z^3)$$

donde $z = 1/(1+t)$. Compare el error obtenido para valores de x entre los puntos de datos, con los obtenidos con polinomios.

Ejercicio 3 Suponiendo que desee aproximar un conjunto de datos con un modelo de la forma:

$$f(x) \sim a \exp(bx), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

con parámetros desconocidos, a, b. En principio se trataría de un problema de cuadrados mínimos no lineal... ¿Se le ocurre cómo convertirlo en un problema lineal?

Ejercicio 4 Probar que si se tienen $n+1$ puntos con diferentes abscisas, el polinomio de cuadrados mínimos de grado n es el polinomio interpolador de grado n. Concluir en particular que para muchas aplicaciones puede ser una mala idea aumentar el grado del polinomio de cuadrados mínimos, hasta hacerlo cercano al número de puntos interpolados menos 1.

Ejercicio 5 Probar que el conjunto de funciones:

$$1,\ \sin(kx),\ \cos(mx), \quad k, m \in \mathbb{N}$$

es ortogonal con el producto escalar

$$< f, g >= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

Verifcar que se trata de un producto escalar en el espacio de funciones continuas, calcular las normas de cada una de las funciones, y normalizarlas.

Ejercicio 6 Verificar la ortogonalidad y calcular la norma de los polinomios de Chebyshev, con el producto escalar

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Ejercicio 7 Utilizando las relaciones de ortogonalidad discretas para los polinomios de Chebyshev:

$$\sum_{k=1}^{m} T_i(x_k)T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ m/2 & i = j \neq 0 \\ m & i = j = 0 \end{cases}$$

donde x_k, $k = 1, \ldots, m$, son los ceros del polinomio de Chebyshev de grado m, probar que si $f(x)$ es una función arbitraria en el intervalo $[-1, 1]$, y si se definen m coeficientes c_j, $j = 1, \ldots, m$ según

$$c_j = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{m} f(x_k)T_{j-1}(x_k)$$

entonces la fórmula de aproximación

$$f(x) \sim \left[\sum_{k=1}^{m} c_k T_{k-1}(x) \right] - .5c_1$$

es exacta en todas las raíces de $T_m(x)$.

Ejercicio 8 Sea $< f, g >$ cualquiera de los productos escalares:

$$< f, g >= \sum_{0}^{n} f(x_j)g(x_j)w_j$$

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

Probar que $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ no puede ser un conjunto ortogonal para $n \geq 2$. (*Sugerencia: Considerar* $< 1, x^n >$ *para* $n \geq 2$).

Ejercicio 9 Considerar el producto escalar

$$< f, g >= \int_0^\infty e^{-x} f(x)g(x)dx$$

Calcular los primeros cuatro polinomios mónicos ortogonales con respecto a este producto escalar. Los polinomios ortogonales obtenidos ortogonalizando por el método de Gram-Schmidt las potencias de x son los llamados polinomios de Laguerre.

Ejercicio 10 Repetir el ejercicio anterior con el producto escalar

$$< f, g >= \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} f(x)g(x)dx$$

Se obtienen los llamados polinomios de Hermitte.

Ejercicio 11 Sea

$$< f, g >= \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)\ dx$$

i)Ver que $< \ , \ >$ es un producto interno en $S_m = \{x, x^2, x^3, \cdots, x^m\}$
ii) Hallar una base ortonormal para S_3.
iii) Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos sobre S_3 para $f(x) = x^4$.

Ejercicio 12 i) Hallar el polinomio $p(x)$ de grado menor o igual que 1 que verifica

$$\int_0^\infty p(x)\exp(-x)dx = \int_0^\infty \exp(-2x)dx$$

$$\int_0^\infty xp(x)\exp(-x)dx = \int_0^\infty x\exp(-2x)dx$$

ii) ¿Quién es $p(x)$? ¿Se le ocurre otra manera de calcularlo?

Ejercicio 13 Sea S el subespacio de las funciones por lo menos una vez derivables, generado por $\{1, \cos(x), \operatorname{sen}(x)\}$.

a) Verifique que

$$\langle f, g\rangle = (f'g')\,(-\frac{\pi}{2}) + (f'g')\,(0) + (fg)\,(\frac{\pi}{2})$$

es un producto interno sobre S.

b) Hallar una base ortonormal de S.

c) Hallar $P_S(\operatorname{sen}(2x))$ y $P_S(\cos(2x))$ donde $P_S(f(x))$ es la proyección ortogonal, para el producto interno definido en (a), de la función $f(x)$ sobre el subespacio S.

d) ¿Cuál es la mejor aproximación por cuadrados mínimos de la función $f(x) = \operatorname{sen}(2x) - 2\cos(2x)$?