ELEMENTOS DE CALCULO NUMERICO

Práctica 7

1^{er} Cuatrimestre 2003

Ejercicio 1 Hallar una fórmula de cuadratura por interpolación de la forma

$$\int_0^{2h} f(x)dx \sim A_0 f(0) + A_1 f(h)$$

interpolando las funciones de base de Lagrange.

Ejercicio 2 Usar el método de coeficientes indeterminados para derivar una fórmula de cuadratura por interpolación:

$$\int_0^{3h} f(x)dx = A_0 f(0) + A_1 f(h) + A_2 f(3h)$$

Ejercicio 3 Usar las fórmulas cerradas de Newton-Cotes de dos y tres puntos (reglas de trapecios y de Simpson, respectivamente) para calcular las integrales:

$$\int_0^1 x^4 dx \qquad \int_{.1}^{.2} \ln(x) dx \qquad \int_0^{.3} \frac{1}{1+x} dx$$

Ejercicio 4 Suponga que $Q_n = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$ es una fórmula de cuadratura por interpolación. Probar que define una aplicación lineal sobre el conjunto de funciones. Suponiendo que la regla de cuadratura es exacta ($Q_n(f) = \int_a^b w(x) f(x) dx$) para las funciones $1,\ x, \ldots,\ x^k$, demostrar que Q_n tiene grado de precisión por lo menos k.

Ejercicio 5 Determinar el grado de precisión de las fórmulas para $\int_{-1}^{1} f(x)dx$:

a) $\frac{2}{3}[2f(-.5) - f(0) + 2f(.5)]$

b) $\frac{1}{4}[f(-1) + 3f(-\frac{1}{3}) + 3f(\frac{1}{3}) + f(1)]$

Ejercicio 6 Construir la fórmula abierta de Newton-Cotes para calcular $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ con nodos $-1/2,\ 0,\ 1/2$, y la fórmula cerrada de Newton-Cotes con nodos en los puntos $-1,\ -1/3,\ 1/3,\ 1$.

Ejercicio 7 Probar que una regla de cuadratura obtenida transladando al intervalo $[a, b]$ una regla de cuadratura en $[-1, 1]$ tiene el mismo grado de precisión que la original.

Ejercicio 8 Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)x^2dx$ mediante una regla de cuadratura de la forma

$$\int_{-1}^{1} f(x)x^2dx \sim A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 3.

Ejercicio 9 Considere la función definida en $[-h, h]$ $(h > 0)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & -h \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 \leq 0 \leq h \end{cases}$$

Hallar el error de la regla de trapecios aplicada a $f(x)$. ¿El orden es igual al obtenido para una función suficientemente suave? Justifique.

Ejercicio 10 Escriba un programa que utilice las reglas de trapecios, de Simpson, y de trapecios compuesta, para calcular aproximaciones a la integral de una función $f(x)$ en un intervalo [a,b].

Ejercicio 11 Calcular aproximaciones de π evaluando numéricamente la integral:

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$$

a) Utilizar la regla de trapecios y la regla de rectángulos con intervalos de longitud constante $h = 1/n$. Ensaye $n = 8$, $n = 32$, $n = 128$. Observe que el error es aproximadamente proporcional a h^2.
b) Usar la rutina `quad` con varios valores de la tolerancia de error. Compare.

Ejercicio 12 Utilizando el programa de la regla de trapecios compuesta del ejercicio 10 implemente el algoritmo de Romberg y apliquelo al ejercicio previo para obtener aproximaciones de π.

Ejercicio 13 a) Calcule el resultado que produce la rutina `quad` aplicada a la integral

$$\int_0^{2\pi} [1 - \cos(32x)] dx$$

¿Cuál es la respuesta correcta? ¿Cómo usaría `quad` para obtener una respuesta mejor? Intente resolver estas preguntas sin ejecutar el programa.

b) Suponga que tiene otra rutina integradora. Explique cómo encontrar un integrando suave, sin singularidades, de modo que produzca resultados incorrectos.

Ejercicio 14 Utilizando el programa del ejercicio 10, calcule los errores cometidos al estimar las integrales:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \qquad \qquad \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$$

por los métodos que conoce para $n = 2^k$, $k = 3, 4, \ldots, 10$. Compare los errores obtenidos con los calculados con las estimaciones de error. Determinar en ambos casos el n de modo que el error cometido sea menor que 1.E-5.

Ejercicio 15 Considere la regla de integración de 1 punto:

$$\int_a^b f(x)dx = A_0 f(s)$$

i) Halle una expresión para el error de la regla.
ii) ¿Para qué valor de s es máximo el grado de precisión? ¿Cómo se relaciona esto con cuadratura gaussiana?

Ejercicio 16 Hallar los pesos y los nodos de las fórmulas de Gauss-Legendre de dos y tres puntos. Los polinomios de Legendre mónicos de grado dos y tres son respectivamente $x^2 - \frac{1}{3}$, y $x^3 - \frac{3}{5}x$. (*Sugerencia: los pesos pueden ser hallados por coeficientes indeterminados*).

Ejercicio 17 Usar las fórmulas de Gauss-Legendre de tres puntos para estimar:

$$\int_{-1}^{1} \sin(3x)dx \qquad \int_1^3 \ln(x)dx \qquad \int_1^2 e^{x^2}dx$$

Ejercicio 18 Probar que no importa cómo se elijan los pesos de una fórmula de cuadratura

$$Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$$

la fórmula no puede tener grado de precisión mayor que $2n+1$. (*Sugerencia: suponer que $Q_n(f)$ está diseñada para aproximar $\int_a^b f(x)w(x)dx$. Hallar entonces un polinomio $p(x) \in \mathcal{P}_{2n+2}$ para el cual $Q_n(p) \neq \int_a^b f(x)w(x)dx$.*)

Ejercicio 19 a) Hallar una regla de integración numérica para calcular

$$\int_{-1}^{1} f(x)(x-1)^2 \; dx$$

que utilice un solo nodo y sea exacta cuando f es un polinomio de grado ≤ 1.

b)¿ Es posible encontrar una regla que utilizando un solo nodo sea exacta para polinomios de grado 2?. Justificar

c) Hallar una cota del error para la fórmula obtenida en a)

Ejercicio 20 Hallar la integral doble sobre el triángulo dado por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$, de la función $f(x) = (x^2 + y^2)$.

(*Sugerencia: Calcular*

$$\int_0^1 \left(\int_0^x (x^2 + y^2)dy \right) dx$$

definiendo una función $F(x) = \int_0^x (x^2 + y^2)dy$, y calculando $\int_0^1 F(x)\; dx$).