

# ELEMENTOS DE CALCULO NUMERICO

## Práctica 8

Primer Cuatrimestre 2003

**Ejercicio 1** Escriba un programa que calcule la integral de una función por los métodos de Euler, de Runge-Kutta de orden 2, y de Runge-Kutta de orden 4.

**Ejercicio 2** Aplicar el método de Euler para hallar  $e = y(1)$  donde  $y(x)$  es solución de  $y' = y$ ,  $y(0) = 1$ . Graficar el error en función de  $h$ . Utilice pasos  $h$  en un rango adecuado. Realice el mismo trabajo con los métodos de Runge-Kutta de orden 2 y de orden 4. Para una misma precisión, trate de obtener una estimación del tiempo que necesita para realizar el cálculo con cada uno de los métodos.

**Ejercicio 3** Aplicar el método de Euler para hacer un mapa de las curvas integrales de las ecuaciones:

$$y' = y$$

$$y' = 1 + xy.$$

En ambos casos verificar sus cuentas con razonamientos *a priori*.

**Ejercicio 4** Utilizar el método de Runge-Kutta de orden 2 para integrar  $y' = y(2 - y)$  con condiciones iniciales  $y(0) = 0.1$ , y  $y(0) = 5$ . Usar  $h = 10^{-2}$  para integrar la ecuación en el intervalo  $[0, 10]$ . Hallar el aspecto del mapa de curvas integrales y comparar.

**Ejercicio 5** Verificar que la función error puede ser definida como la solución de la ecuación diferencial

$$y'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2)$$

con dato inicial  $y(0) = 0$ . Utilizar el método de Runge-Kutta de orden 2 para hallar  $\text{erf}(x_i)$  con  $x_i = 0, 0.1, \dots, 1$ . Comparar con los valores que obtuvo en la práctica anterior.

**Ejercicio 6** Utilizar el método de Euler para resolver  $y' = -25y$ , con dato inicial  $y(0) = 1$ , en el intervalo  $[0, 1]$ . Emplear pasos  $h = 0.1$  y  $h = 0.05$ , imprimiendo la solución a cada paso, y estimar los errores relativos en  $x = 1$ .

**Ejercicio 7** Considerar en general el problema de valores iniciales:  $y' = \lambda y$ ,  $y(0) = y_0$ . Probar que el método de Euler con paso  $h$  genera la sucesión:

$$y_i = (1 + \lambda h)^i y_0 \quad i = 0, 1, \dots$$

Observar que si  $\lambda < 0$ , la solución tiende a cero a medida que  $x$  crece. Dado un  $\lambda < 0$ , ¿para qué valores de  $h$  resulta que  $y_i \rightarrow 0$  cuando  $i$  tiende a infinito? Aplique sus conclusiones al problema anterior.

**Ejercicio 8** Considerar la ecuación

$$y' = \frac{y}{\pi - x}, \quad y(0) = 1$$

- a) Calcular la solución analíticamente.
- b) Resolver utilizando el método de Euler con  $h = 0.1$ , en  $[0, 10]$  ¿Nota algo extraño? ¿Qué pasa?
- c) ¿Cómo lo solucionaría? Repita la parte b) integrando con `ode45`. ¿Subsisten sus problemas?

**Ejercicio 9** Probar que el problema de valores iniciales  $y' = \sqrt{|y|}$ ,  $y(0) = 0$  tiene infinitas soluciones. (*Sugerencia: verificar que para cualquier  $\alpha > 0$*

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \alpha \\ \frac{(x - \alpha)^2}{4} & x > \alpha \end{cases}$$

*es solución*).

Si se resuelve este problema por el método de Euler, ¿qué solución se obtiene? ¿Qué pasa si se comienza en  $y(0)=0.000001$ ? ¿Qué conclusión saca?

**Ejercicio 10** Dado el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(x) = x(\sin y(x))^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Si se resuelve esta ecuación por el método de Euler con paso  $h$  constante. ¿Qué valor de  $h$  habrá que tomar para garantizar que  $y(1)$  se aproxima con error menor que  $\frac{1}{1000}$ ?

**Ejercicio 11** Considere el problema  $y' = -2xy$ ,  $y(0) = 1$ , con  $x \geq 0$ .

1. Determinar una cota, en términos de  $h$ , para el error cometido si se usa el método de Euler para calcular  $y(1)$ .
2. Cómo debería tomar  $h$  si se desea que el error cometido sea menor que  $10^{-3}$ .
3. Calcule la solución en  $x = 1$  usando el valor de  $h$  obtenido en el ítem previo, y verifique las estimaciones previstas comparando con la solución exacta.

**Ejercicio 12** Resolver por el método de Euler el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_1(x) - y_2(x) \end{aligned}$$

**Ejercicio 13** Probar que una ecuación de orden  $n$  se puede escribir como un sistema de  $n$  ecuaciones de primer orden. Observe que un problema de valores iniciales para la primera se transforma en un problema de valores iniciales para el sistema.

**Ejercicio 14** Resolver el problema de valores iniciales:

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Comparar el valor obtenido con un método de Runge-Kutta de orden 2 para  $y(3)$  con el valor exacto.

**Ejercicio 15** Resolver por el método de Euler el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} u' &= 998u + 1998v \\ v' &= -999u - 1999v \end{aligned}$$

Utilice  $h=0.01$ , calculando algunos pasos de la integración. Compare con la solución analítica. ¿Qué observa? Este fenómeno es muy importante, y se denomina *stiffness*.

**Ejercicio 16** Hallar el error local para las siguientes discretizaciones de la derivada primera de una función  $f$ :

$$i) f'(x) \sim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad ii) f'(x) \sim \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Explícite las hipótesis de suavidad que requiere de la función  $f$ . Análogamente con:

$$f'(x) \sim -\frac{1}{h} \left( \frac{3}{2}f(x) - 2f(x+h) + \frac{1}{2}f(x+2h) \right)$$

Trate de imaginar qué tipo de situación requeriría de una fórmula de este estilo.

**Ejercicio 17** Hallar el error local para la discretización habitual de la derivada segunda, y explícite sus requerimientos de suavidad:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

**Ejercicio 18** Hallar el error local para los métodos de Euler explícito e implícito.

**Ejercicio 19** Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones de recurrencia:

$$\begin{aligned} y(i+2) - y(i+1) - 2y(i) &= 0 \\ y(i+3) - 6y(i+2) + 12y(i+1) - 8y(i) &= 0 \\ y(i+4) - 4y(i+3) + 7y(i+2) - 6y(i+1) + 2y(i) &= 0 \end{aligned}$$

**Ejercicio 20** Considerar el siguiente problema de Cauchy:

$$y(n+2) - 2xy(n+1) + y(n) = 0 \quad n \geq 0$$

con datos iniciales:

$$y(0) = 1 \quad y(1) = x$$

Notar que en general  $y(n)$  es un polinomio de grado  $n$ . Verificar que la solución general es

$$y_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}$$

En particular, si  $|x| \leq 1$ , sustituyendo  $x = \cos(\text{acos}(x))$  se obtiene que la solución se escribe  $y_n(x) = \cos(n \text{acos}(x))$ . ¿Reconoce ahora las soluciones de esta recurrencia?

**Ejercicio 21** 1. Deducir la fórmula de Milne:

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2})$$

interpolando la solución en  $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}$  con un polinomio de grado a lo sumo 3, y aproximando:

$$\int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} f(s, y(s)) ds = \int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} y'(s) ds = y(x_{n+1}) - y(x_{n-3})$$

2. Hallar su error local.

**Ejercicio 22** Considere la ecuación diferencial

$$y' = -cy$$

donde  $c > 0$  es una constante. Escriba la recurrencia que se obtiene utilizando el método de Euler. ¿Para qué valores de  $h$  es el método inestable? Escriba la recurrencia obtenida mediante el método de Euler implícito (*backward Euler*). Analice su estabilidad.

**Ejercicio 23** Analice el orden del siguiente método

$$y_n = y_{n-3} + \frac{3}{8}h(f_n + 3f_{n-1} + 3f_{n-2} + f_{n-3})$$

**Ejercicio 24** 1. Hallar el error de truncado y analizar la convergencia del método de Adams-Bashforth

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n)$$

2. ¿Qué puede decir de la estabilidad relativa cuando  $h \rightarrow 0$ ?

**Ejercicio 25** Considere el método de 2 pasos

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + ay_n = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_{n+1})$$

donde  $a$  es un parámetro. Determinar  $a, \beta_2, \beta_1, \beta_0$  de modo que el método resultante tenga orden 4.

**Ejercicio 26** Considere el método de Adams-Moulton

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(5f_{n+3} + 8f_{n+2} - f_{n+1})$$

1. Calcule el error de truncado, y diga si es convergente o no.

2. Aplicando el método a la ecuación  $y' = \lambda y$ ,  $\lambda < 0$ , diga para qué valores de  $h$  el método es relativamente estable.

**Ejercicio 27** Considerar la ecuación diferencial

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

a) Dado que

$$y_{n+1} - y_{n-1} = \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

hallar el método que resulta de aproximar la integral interpolando  $f$  en  $x_{n-1}, x_n, x_{n+1}$  (equiespaciados) por un polinomio de grado 2.

b) Hallar el orden del método.