**Elementos de Cálculo Numérico**
**Trabajo Practico 2**

El problema de la oscilación de una membrana cuadrada fija por sus bordes, puede ser descripto al menos para pequeñas deformaciones, por la ecuación de ondas

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \qquad (x, y) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \tag{1}$$

con la condición de contorno

$$u_{|\partial\Omega} = 0.$$

Aquí $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Los datos iniciales adecuados son, por ejemplo, la posición inicial de la membrana y su velocidad inicial. Supondremos $c = 1$.

Resolviendo por el método de separación de variables, se buscan soluciones de la forma $U(x, y, t) = T(t)Z(x, y)$, obteniéndose que las funciones $T$ y $Z$ deben verificar

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\Delta Z(x, y)}{Z(x, y)} = \lambda$$

para alguna constante $\lambda$. Usando la condición de contorno resulta que debe ser

$$Z_{|\partial\Omega} = 0.$$

De esta manera, $Z$ debe ser una autofunción del operador $\Delta$ y $\lambda$ el correspondiente autovalor:

$$\Delta Z - \lambda Z = 0. \tag{2}$$

Se puede demostrar que la ecuación (2) tiene una sucesión de autovalores negativos $\{\lambda_n\}$ con correspondientes autofunciones $Z_n$, y que $\lambda_n \to -\infty$ cuando $n \to \infty$, además el autovalor de menor módulo, $\lambda_1$, es simple. La correspondien-te función $T_n$ debe entonces ser una solución de

$$T_n''(t) - \lambda_n T_n(t) = 0.$$

Si $\lambda_n = -\omega_n^2$ resulta que $T_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$. De esta manera se obtienen las siguientes soluciones de (1)

$$U_n(x, y, t) = (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t))Z_n(x, y),$$

y por lo tanto se pueden buscar soluciones de (1) de la forma

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t))Z_n(x, y).$$

Las constantes $a_n$ y $b_n$ se obtienen a partir de las condiciones iniciales.

Los autovalores $\lambda_n$ son los *modos normales de oscilación.*

**Ejercicio.** Aproximar numéricamente $\lambda_1$.

(i) Discretizar el dominio con una malla $(x_i, y_j) = (i/N, j/N)$, $i, j = 0 \ldots N$. Siendo las incógnitas los valores $z_{ij} \sim z(x_i, y_j)$ los valores de la autofunción en los nodos, la ecuación (2) puede discretizarse como

$$\frac{z_{i+1,j} - 2z_{ij} + z_{i-1,j}}{h^2} + \frac{z_{i,j+1} - 2z_{ij} + z_{i,j-1}}{h^2} = \lambda z_{ij} \quad i, j = 1, \ldots, N-1.$$

(ii) Reenumerando los nodos, y redefiniendo el vector $z$, reescribir el sistema de ecuaciones anterior como $Az = \lambda z$ para alguna matriz $A$.
(iii) Aplicando el método de las potencias (inverso) aproximar el primer autovalor de $A$ y la primera autofunción. Probar con distintos valores de $h$.
(iv) Graficar una aproximación de la primera autofunción del laplaciano. Si se anima, hacer una animación para ver la oscilación en el tiempo, e intentar calcular otros modos normales.