Elementos de Cálculo Numérico

Práctica N°2: Normas y condicionamiento de una matriz - Eliminación de Gauss y descomposición LU.

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$. Calcular $cond_2(A)$ y $cond_\infty(A)$.

2. Probar que si A es una matriz de $n \times n$ y $\| \ \|$ es una norma matricial, la condición de A verifica la desigualdad:
$$\frac{1}{cond(A)} \leq \inf \left\{ \frac{\|A - B\|}{\|A\|} : B \text{ es singular} \right\}$$
Nota: Más aún, vale la igualdad, pero la otra desigualdad es un poco más complicada de probar. De dicha igualdad se puede concluir que $cond(A)$ mide la distancia relativa de A a la matriz singular más próxima.

3. Mostrar que $cond_\infty(A) \to \infty$ cuando $\varepsilon \to 0$ para
(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\varepsilon \\ 2 & 3 & 4 \\ 1-\varepsilon & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Sea A la matriz del ejercicio 1. Se quiere resolver el sistema $Ax = b$ para un valor de $b \neq 0$ que se conoce con una precisión mayor que 10^{-3}; es decir, se conoce el valor conjunto de $b + \Delta b$ y se sabe que el error relativo $\dfrac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} < 10^{-3}$.
   (a) Estimar el error relativo de la solución hallada $\tilde{x} = x + \Delta x$.
   (b) Encuentre un ejemplo para b y $\Delta b \neq 0$ de modo que $\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2}$ sea exactamente $cond_2(A) \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2}$.

5. Sea x la solución exacta al sistema $Ax = b$ y $\tilde{x}$ la solución obtenida numéricamente. Se llama "vector residual" a $r := b - A\tilde{x}$. Si $e = x - \tilde{x}$ se tiene $Ae = r$. Mostrar que:
$$\frac{1}{cond(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq cond(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}.$$
Concluir que para una matriz mal condicionada los métodos numéricos no aseguran buena aproximación.

6. Considerar la matriz A con inversa A^{-1}
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 68 & -41 & -17 & 10 \\ -41 & 25 & 10 & -6 \\ -17 & 10 & 5 & -3 \\ 10 & -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar $cond_\infty(A)$ y estimar el error relativo $\dfrac{\|x_c - x_t\|_\infty}{\|x_t\|_\infty}$ de la solución de $Ax = b$, donde $b = \{23, 32, 33, 31\}$, x_t es la solución exacta, y x_c es la solución numérica aproximada obtenida usando la solución que se obtiene de multiplicar $A^{-1}b$, con aritmética de punto flotante de dos dígitos .

7. Sean $A_n \in I\!R^{2\times 2}$, $b_n \in I\!R^2$ definidos para cada $n \in I\!N$ por: $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 + \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}$, $b_n = (1, 2 - \frac{1}{n^2})$.

   (a) Resolver $A_n\, x_t = b_n$ en forma exacta.

   (b) Para $x_c = (1, 0)$, hallar $cond_\infty(A_n)$, $r_n = A_n\, x_c - b_n$ y verificar la cota de error
$$\|x_c - x_t\|_\infty \le \|A^{-1}\|_\infty \|r\|_\infty$$

8. Sea D_n la matriz diagonal de $n \times n$ con elementos diagonales iguales a $1/10$. Calcular el determinante de D_n y ver que $det(D_n) \to 0$ si $n \to \infty$. ¿D_n está mal condicionada?

9. Para cada $n \in I\!N$, se quiere calcular la solución del sistema lineal:
$$\begin{aligned} 10^{-n}x + 1.0y &= 3.0 \\ 1.0x + 1.0y &= 2.0 \end{aligned}$$

   (a) Analizar para qué valores de n la eliminación gaussiana sin pivoteo, usando aritmética de punto flotante de 3 dígitos, produce resultados que difieren significativamente de la solución real (error relativo en $\|\ \|_\infty > 0.3$)

   (b)) Repita el método de eliminación de Gauss eligiendo el pivote más conveniente.

10. Se quiere calcular el determinante de $A \in I\!R^{n\times n}$. Estimar cuántas operaciones se necesitan para calcularlo

    (a) mediante el desarrollo por alguna fila o columna.

    (b) si se utiliza la descomposición LU.

11. (a) Escribir un programa para resolver $Ax = b$, $A \in I\!R^{n\times n}$ usando eliminación de Gauss sin pivoteo.

    (b) Utilizar el programa anterior para calcular la inversa de A.

12. Obtener la descomposición LU de una matriz A en el caso que A sea tridiagonal.

13. Escribir un programa que resuelva el sistema de ecuaciones $Ax = b$, donde A es una matriz tridiagonal. ¿Cuántas operaciones requiere? Piense si debe almacenar todos los elementos nulos de A. Utilice el comando **flops** de Matlab, para comparar con la eficiencia del comando \.

14. Considere el algoritmo de eliminación Gaussiana sin pivoteo aplicado a un sistema $Ax = b$ con una matriz tridiagonal. Demuestre que si la matriz es además estrictamente diagonal dominante, es posible encontrar la solución sin encontrar ningún pivote nulo. (Ayuda: Demuestre que si A es estrictamente diagonal dominante, entonces luego de hacer cada etapa de la eliminación la matriz resultante también lo es.)

15. Probar que la matriz no singular:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

no tiene una descomposición LU, mientras que la matriz singular $A + I$ sí la tiene. Dar la matriz de permutaciones P tal que PA tenga una factorización LU.

16. Las matrices de Hilbert $H_n \in I\!R^{n\times n}$, definidas en el lugar i, j por $h_{i,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$, son un ejemplo de matrices mal condicionadas; por tal motivo se las utiliza habitualmente para testear rutinas numéricas. Usar su programa del ejercicio 11 para calcular la inversa de la matriz de Hilbert H_4. Comparar con el resultado obtenido con **inv**. Verificar su resultado calculando los productos $H_4H_4^{-1}$, $H_4^{-1}H_4$.

    Nota: estas matrices se pueden obtener mediante el comando **hilb**(n) de MATLAB. Ver que H_n está efectivamente mal condicionada usando el comando **cond** de MATLAB.

17. Considerar el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, con A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

    Verifique que la eliminación de Gauss crea elementos no nulos en lugares donde inicialmente había ceros. Es decir, produce una matriz densa, a pesar de partir de una matriz rala. En muchas aplicaciones, uno debe resolver un sistema de ecuaciones lineales del orden de $10^4 \times 10^4$ donde hay a lo sumo 5 elementos no nulos por fila. Es decir, hay del orden de 5×10^4 elementos no nulos en la matriz, cifra bastante inferior a la de elementos de la matriz. Calcular qué cantidad de bytes ocuparía una matriz densa de esas dimensiones. ¿Comprende cuál es el interés en métodos de resolución de matrices ralas que no involucren un llenado excesivo?

18. Utilize el Teorema de Cholesky para demostrar que las siguientes propiedades de una matriz simétrica son equivalentes:

    - A es definida positiva
    - hay un conjunto de vectores linealmente independientes $x^1, x^2, \cdots, x^n$ de $I\!R^n$, tales que $a_{ij} = (x^i)^t x^j$.

19. Las matrices de Hilbert del problema 16 son simétricas y definidas positivas. Hallar la descomposición de Cholesky de la matriz de Hilbert H_4. Utilizar esta descomposición para calcular H_4^{-1}, y comparar con los resultados del problema 16.