Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática
Segundo Cuatrimestre de 2003

Elementos de Cálculo Numérico

Práctica N°4: Resolución de ecuaciones no-lineales - Método de Newton-Raphson (N-R).

1. Usar el método de bisección para hallar una raíz positiva de la ecuación trascendente:
$$3x = \tan(x)$$
¿Cuantos pasos hay que hacer para garantizar que el error es menor que 10^{-5}?

2. Hallar una raíz de $2x^3 + x - 2 = 0$ usando los métodos de bisección y Regula-Falsi. Comenzar con el intervalo $[0, 1]$.

3. Calcular $\sqrt{2}$ por los métodos de bisección y N-R, con dos decimales significativos, acotando el error en cada paso.

4. Demostrar que la ecuación
$$F(x) = e^x + 5\sin x - 2 = 0$$
tiene una única raíz en el intervalo $(0, \frac{3}{2})$. Encontrar las cotas necesarias de $|f'|$ y $|f''|$ para determinar un valor inicial de modo que el método N-R converja a la raíz. Aplicar el método para hallar una aproximación de ésta.

5. Considerar la función $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. Determinar para qué valores de x_0 la iteración N-R es convergente, para cuáles es divergente, y cuándo se obtienen ciclos periódicos.

6. Ver que una raíz múltiple de un polinomio f es raíz simple de f/f'. Aplicar el método N-R a $f(x)$ y a $f(x)/f'(x)$ para hallar la raíz múltiple, donde
$$f(x) = (x-1)(x-2)^2.$$
Notar que, a pesar que la función f no está en las hipótesis del método N-R, éste converge aunque no tan velozmente como cuando la raíz múltiple se halla como solución de f/f'.

7. Para f una función C^2 que tiene una raíz de orden 2 en x_0
   (a) Demostrar que el método N-R converge sólo linealmente a x_0.
   (b) ¿Cuál es el orden de convergencia de la siguiente modificación?
$$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

8. Sea f una función C^1 y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión que se obtiene de aplicar el método N-R a f. Supongamos que x_n converge a r y $f'(r) \neq 0$, mostrar que r es raíz de f.

9. Sea f una función suave, y a tal que $f(a)=0$, y $f'(a)\neq 0$.

   (a) Suponiendo que en $(a,b]$, f, f', f'' son positivas, probar que la iteración de N-R generada a partir de $x_0\in(a,b)$ converge decrecientemente hacia a.

   (b) Con las mismas hipótesis, si $x_1\in(a,x_0)$, probar que la sucesión generada por el método de la secante a partir de x_0, x_1 converge decrecientemente hacia a.

10. Sea $f(x)=x^\alpha$. Se desea utilizar el método N-R para resolver la ecuación $f(x)=0$, comenzando con $x_0>0$. Analizar el comportamiento del método en los casos

    (a) $\alpha\geq 1$ (b) $\alpha=\frac{1}{3}$ (c) $\alpha=\frac{1}{2}$

11. Sea $f(x)=(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_n)$ donde $c_1<c_2<\dots<c_n$. Probar que si $x_0>c_n$ la sucesión de N-R converge a c_n

12. Resolver $\cos(x)=2x$, $x>0$ utilizando:

    (a) La iteración de punto fijo $x_{n+1}=\frac{1}{2}\cos(x_n)$

    (b) El método N-R.

    (c) El método de la secante.

    Graficar, usando Matlab, las tres sucesiones obtenidas y comparar.

13. Sea g una función tal que g' es continua en $[s,b]$, donde s es un punto fijo de g. Si además, se verifica que $0\leq g'(x)\leq K<1$ para todo $x\in[s,b]$, mostrar que la iteración, comenzando con $x_0\in[s,b]$, converge decrecientemente a s.

14. Sea $F:I\!R-\{0\}\to I\!R$ definida como $F(x)=\dfrac{8x-1}{x}-e^x$.

    (a) Dibujar la gráfica de F y determinar el número de raíces positivas de la ecuación $F(x)=0$, localizando cada raíz entre dos enteros consecutivos.

    (b) Para cada una de las siguientes funciones:

    $$f_1(x)=\frac{1}{8}(1+xe^x),\quad f_2(x)=\ln\Big(\frac{8x-1}{x}\Big)$$

    consideramos el siguiente método iterativo: dado $x_0=1$ sea

    $$x_{n+1}=f_i(x_n),\ n\in I\!N,\ (i=1,2).$$

    Estudiar si estas sucesiones convergen hacia alguna de las raíces de $F=0$.

    (c) Estimar las raíces (se puede hacer con Matlab).

15. Dada la función $f(x)=x+1/x-2$, $f:I\!R>0\to I\!R$, se construye el siguiente algoritmo para aproximar la raíz $r=1$:

    $$x_{n+1}=2-1/x_n$$

    (a) Verificar que si $x_0>1$ entonces la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente por 1. Concluir que $x_n\to 1$, aunque esta iteración no está en las hipótesis del teorema del punto fijo. ¿Qué hipótesis no se cumple?

    (b) Dar un algoritmo para aproximar la raíz de f que converja cuadráticamente.

16. Sea f una función C^1 en las condiciones del método N-R. Sea $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Mostrar que el método N-R es un método de punto fijo.

17. Se quiere aplicar el método N-R para dar una tabla de valores de la función $y(x)$ definida implícitamente por la ecuación $G(x, y) = 0$.

    El método consiste en comenzar la tabla en un par de valores x_0, y_0 que verifican $G(x_0, y_0) = 0$ y proceder por incrementos en x hasta llegar al valor x_N deseado.

    En cada paso se obtiene el valor de y_{n+1} aplicando el método N-R a la función $G(x_{n+1}, y)$ donde y es la variable y x_{n+1} permanece fijo; con valor inicial el valor de y_n obtenido en el paso anterior.

    (a) Aplicar el método para la ecuación $G(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, comenzando en $x_0 = 0, y_0 = 1$ para valores de x en $[0, 1]$. Graficar junto con la solución que se obtiene de despejar analíticamente y comparar.

    (b) Aplicar el método para $G(x, y) = 3x^7 + 2y^5 - x^3 + y^3 - 3$. Comenzar la tabla en $x_0 = 0, y_0 = 1$ y proceder por incrementos en x de 0.2 hasta llegar a $x_{50} = 10$.

18. Dada $F : I\!R^n \to I\!R^n$ el método N-R generalizado consiste en realizar la iteración vectorial

$$x_{n+1} = x_n - (DF|_{x_n})^{-1}.F(x_n),$$

    donde $(DF|_{x_n})^{-1}$ es la inversa de la matriz diferencial de F evaluada en x_n.

    Usar la versión generalizada a varias variables del método N-R para para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

    (a) $x^2 + y^2 = 9, \quad x^2 - y^3 = 1.$

    (b) $x^2 - y^2 = 3, \quad \sin x \sin y = \frac{1}{2}.$

    (c) $x + xy + y = 0, \quad x^2 + y^2 = 1.$

    (d) $x + xy + xyz = 1, \quad x^2 - y^2 + z^3 = 3, \quad xy + yz = 1.$

    Para los ítems (a), (b) y (c) graficar la sucesión de puntos obtenida.