# Elementos de Cálculo Numérico

## Práctica N°5: Interpolación

1. Para cada uno de los conjuntos de datos dados, calcular el polinomio $p(x)$ interpolador de grado menor o igual que 3, en la forma de Lagrange. Verificar utilizando el comando **polyfit** de Matlab. Graficar el polinomio interpolador, usando el comando **polyval**.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | -1 | 0 | 2 | 3 |
| y | -1 | 3 | 11 | 27 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | -1 | 0 | 1 | 2 |
| y | -3 | 1 | 1 | 3 |

2. Repetir el problema anterior, usando el método de coeficientes indeterminados.

3. Construir la tabla de diferencias divididas para los datos del Ejercicio 1, y emplearla para construir el polinomio interpolador.

4. Agregar a las tablas de datos del Ejercicio 1 el punto $x = 4,\ y = 1$. Aumentar la tabla de diferencias divididas y calcular el polinomio interpolador.

5. Programar una función que dados dos vectores $x$ e $y$ y un número $\alpha$, calcule el valor de $P(\alpha)$ donde $P$ es el polinomio de grado mínimo que interpola los datos $(x(i), y(i))$.

6. Sea $f : [0,1] \to I\!R$, $f(x) = \sin(x) + e^x$. Sea $P_n$ el polinomio de grado $n$ que interpola a $f$ en $n+1$ puntos equiespaciados.
   (a) Acotar el error que se comete al utilizar $P_n$ en lugar de $f$.
   (b) Sea $C_n$ la cota hallada en (a). Para $n = 2, 5, 10$ graficar simultáneamente $f$, $f + C_n$, $f - C_n$ y $P_n$.

7. Considerar la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + 25x^2}$ en el intervalo [-1,1].
   Graficar $f$ junto con los polinomios que resultan de interpolar a $f$ en los $n+1$ puntos equiespaciados $x_0 = -1, \ldots, x_i = x_0 + \dfrac{2i}{n}, \ldots, x_n = 1$; para $n = 5, 10, 15$.

8. Repetir el Ejercicio 7 para la función $f : [-1,1] \to I\!R$, $f(x) = |x|$.

9. Sea $f$ una función $C^\infty$ tal que para todo $k \in I\!N$ y para todo $x \in [a,b]$ se tiene:
$$|f^k(x)| \leq C^k k!$$
   Mostrar que, si $0 < C < \dfrac{1}{b-a}$ y $P_n$ en un polinomio de grado $n$ que interpola a $f$ en $n+1$ puntos distintos, entonces $P_n$ converge a $f$ uniformemente, es decir, $\|f - P_n\|_\infty \to 0$ cuando $n$ tiende a $\infty$.

10. Sea $f : [-1,1] \to I\!R$, $f(x) = \dfrac{1}{a+x}$. Sean $(x_n)_{n\geq 0}$ una sucesión arbitraria de puntos en $[-1,1]$ y $P_n(x)$ el polinomio que interpola a $f(x)$ en $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Demostrar que si $a > 3$ entonces $P_n$ converge a $f$ uniformemente.

11. Para $n = 5, 10, 15$; graficar simultáneamente el polinomio $W_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$, donde $x_i = -1 + 2i/n$; $i = 0, \ldots, n$ y el polinomio de Tchebychev $T_{n+1}$.

12. Repetir los Ejercicios 6 y 7 usando los polinomios que interpolan a la función $f$ en los ceros del polinomio de Tchebychev de grado $n+1$, para $n = 5, 10, 15$.

13. Determinar el grado mínimo $n$ que debe tener un polinomio que interpola en los ceros de $T_{n+1}$ a la función $f(x) = e^{3x}$, $x \in [-1,1]$, para que el error $\|f - p\|_\infty \leq 10^{-10}$.

14. Utilizar el método de coeficientes indeterminados para hallar un polinomio $p$ de grado 2 que satisfaga:
$$p(1) = 0, \quad p'(1) = 7, \quad p(2) = 10$$

15. Construir la tabla de diferencias divididas para los datos del Ejercicio 14, y emplearla para construir el polinomio interpolador.

16. Para ilustrar qué pasa cuando se desea interpolar no sólo una función sino también sus derivadas, consideramos el problema de hallar $p$ de grado a lo sumo 3 que verifique:
    (a) $p(0) = 1, \quad p'(0) = 1, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1;$
    (b) $p(-1) = 1, \quad p'(-1) = 1, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1;$
    (c) $p(-1) = 1, \quad p'(-1) = -6, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1.$

    Usando el método de coeficientes indeterminados, demostrar que el problema (a) tiene solución única, el problema (b) no tiene solución, y el problema (c) tiene infinitas soluciones.

17. Analizar para qué valores de $x_0,\ x_1,\ x_2$, y $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2$ existe un polinomio de grado 2 que satisface:
$$p(x_0) = \alpha_0,\ p(x_1) = \alpha_1,\ p'(x_2) = \alpha_2.$$

18. Sea $f \in C^2[a,b]$, y sean $x_0 = a, x_1 = a + h, \ldots, x_n = b$, donde $h = (b-a)/n$. Considerar la poligonal $l(x)$que interpola a $f$ en los puntos $x_i$, $i = 0 \ldots n$. Probar que
    (a)
$$|f(x) - l(x)| \leq \frac{h^2}{2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$
    (b)
$$|f'(x) - l'(x)| \leq h \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

19. Sea $f$ como en el Ejercicio 7. Construir una spline cúbica que interpole a $f$ en la red $\{-1, -0.75, \ldots, 0.75, 1\}$, tomando como condiciones de borde las derivadas de $f$.