Elementos de Cálculo Numérico

Práctica N°8: Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1. Utilizar el método de Euler para resolver $\begin{cases} y' = -10y & \text{en } [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$

   Emplear pasos $h = 0.1$ y $h = 0.05$. Graficar ambas soluciones junto con la solución exacta.

2. Aplicar el método de Euler para hacer un mapa de las curvas integrales, en la región $[0,10] \times [0,10]$, de las ecuaciones:

   (a) $y' = y$, (b) $y' = 1 + xy$.

3. Considerar en general el problema de valores iniciales: $y' = \lambda y$, $y(0) = y_0$.

   (a) Probar que el método de Euler con paso h genera la sucesión:

   $$y_i = (1 + \lambda h)^i y_0 \quad i = 0, 1, \ldots.$$

   (b) Mostrar que si $\lambda < 0$, la solución exacta tiende a cero a medida que x crece.

   (c) Para $\lambda < 0$, determinar el paso h de modo que $y_i \to 0$ cuando i tiende a infinito.

4. Utilizar los métodos de Euler explícito e implícito, con paso $h = 0.1$ para resolver

   $$\begin{cases} y' = y + 3 & \text{en } [0,10] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   Graficar la solución obtenida. Comparar con la solución que se logra al utilizar el comando `ode45` de Matlab.

5. Hallar la solución del problema $y' = 2xy$ con $y(0) = 1$ utilizando el método de Taylor de orden 2 en el intervalo $[0,10]$. Graficar esta solución junto con la que se obtiene de aplicar el método de Euler.

6. Escriba un programa que resuelva la ecuación diferencial del Ejercicio 4 por algún método de Runge-Kutta de orden 2 y de orden 4. Agregar estas soluciones al gráfico del Ejercicio 4.

7. Utilizar un método de Runge-Kutta de orden 2 para integrar $y' = y(2 - y)$ con condiciones iniciales $y(0) = 0.1$, y $y(0) = 0.5$. Usar $h = 10^{-2}$ para integrar la ecuación en el intervalo $[0,10]$. Graficar las soluciones halladas.

8. Verificar que la función error, `erf`, puede ser definida como la solución de la ecuación diferencial
$$y'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} exp(-x^2)$$
con dato inicial $y(0) = 0$.Utilizar un método de Runge-Kutta de orden 2 para hallar $\text{erf}(x_i)$ con $x_i = 0, 0.1, \dots, 1$. Comparar con los valores obtenidos directamente con el comando `erf` de Matlab.

9. Considerar la ecuación
$$y' = y^2, \qquad y(0) = 0.2$$
   (a) Calcular el tiempo T en que la solución analítica explota.

   (b) Resolver la ecuación utilizando el método de Euler adaptativo (de parámetro λ) de modo que el tiempo en que explota la solución numérica T_λ diste de T en menos que 10^{-2}.

   (c) Graficar la solución obtenida en los intervalos $[0, T]$ y $[0, 2T]$.

10. Probar que los métodos de Euler, Runge-Kutta y Taylor son consistentes.

11. Hallar el error local para los métodos de Euler explícito e implícito.

12. Se quiere estimar, aplicando el método de Euler, el valor de e como $y(1)$ donde $y(x)$ es solución de $y' = y,\ y(0) = 1$. Hallar un paso h de modo que el error cometido resulte menor que 10^{-3}. Realizar el mismo trabajo para el método de Taylor de orden 2.

13. Considerar el problema $y' = -2xy$, $y(0) = 1$, con $x \geq 0$.

   (a) Determinar una cota, en términos de h, para el error cometido si se usa el método de Euler para calcular $y(1)$.

   (b) ¿Cómo debería tomar h si se desea que el error cometido sea menor que 10^{-4}?

   (c) Calcular la solución en $x = 1$ usando el valor de h obtenido en el item previo, y verificar las estimaciones previstas comparando con la solución exacta.

14. Repetir los items (a) y (b) del ejercicio anterior para el problema:
$$\begin{cases} y'(x) = & x(seny(x))^2 \\ y(0) = & 1 \end{cases}$$

15. Resolver por el método de Euler el siguiente sistema de ecuaciones, con valores iniciales $y_1(0) = 1,\ y_2(0) = -1$:
$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_1(x) - y_2(x) \end{aligned}$$

16. Probar que una ecuación de orden n se puede escribir como un sistema de n ecuaciones de primer orden. Mostrar que un problema de valores iniciales para la primera se transforma en un problema de valores iniciales para el sistema.

17. Considerar el siguiente problema:

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad \text{con } y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Comparar el valor obtenido con un método de Runge-Kutta de orden 2 para $y(3)$ con el valor exacto.

18. Considerar la ecuación $y'(s) = f(s, y(s))$ con f una función continua.

    (a) Interpolando $f(s, y(s))$ en los valores x_n, x_{n-1}, x_{n-2} para aproximar

    $$\int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} f(s, y(s))ds = \int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} y'(s)ds = y(x_{n+1}) - y(x_{n-3}),$$

    deducir la fórmula de Milne:

    $$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}).$$

    (b) Hallar su error de truncación local y analizar la convergencia (estabilidad y consistencia).

19. Analizar el orden del siguiente método

$$y_n = y_{n-3} + \frac{3}{8}h(f_n + 3f_{n-1} + 3f_{n-2} + f_{n-3}).$$

20. **Adams-Bashforth.** Hallar el error de truncación local y analizar la convergencia del método

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n).$$

21. **Adams-Moulton.** Idem ejercicio anterior para el método

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(5f_{n+3} + 8f_{n+2} - f_{n+1}).$$

22. Considerar el método de 2 pasos

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + ay_n = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_{n+1})$$

donde a es un parámetro. Determinar $a, \beta_2, \beta_1, \beta_0$ de modo que el método resultante tenga orden 4.

23. **Miscelánea.** Considerar la ecuación $y' = \sqrt{|y|}$.

    (a) Para el valor inicial $y(0) = 0$, seguir las iteraciones del método de Euler, con paso $h = 0.1$ hasta llegar al valor de $y(10)$.

    (b) Graficar la solución que se obtiene al aplicar el método de Euler, si el valor de $y(0)$ es dado con un error de 10^{-6}, es decir $y(0) = 0.000001$.

Nota: La gran propagación del error en el dato inicial se debe a que esta ecuación tiene infinitas soluciones si $y(0) = 0$. En particular, cualquiera sea $\alpha > 0$

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \alpha \\ \dfrac{(x-\alpha)^2}{4} & x > \alpha \end{cases}$$

es solución de la misma.