# Elementos de Cálculo Numérico

## Práctica N°4: Resolución de ecuaciones no-lineales - Método de Newton-Raphson (N-R).

1. Usar el método de bisección para hallar una raíz positiva de la ecuación trascendente:
$$2x = \tan(x)$$
¿Cuántos pasos hay que hacer para garantizar que el error sea menor que $10^{-5}$?

2. Hacer un programa en `Matlab` que ejecute los primeros 20 pasos de los métodos de bisección y Regula-Falsi para hallar una raíz de la ecuación $2x^3 + x - 2 = 0$ comenzando con el intervalo $[0, 1]$.

3. Hacer un programa en `Matlab` que ejecute los primeros 20 pasos de los métodos de bisección y N-R, para calcular $\sqrt[3]{2}$ comenzando con valores iniciales apropiados.

4. Demostrar que la ecuación
$$f(x) = e^x + 5\sin x - 2 = 0$$
tiene una única raíz en el intervalo $(0, \frac{3}{2})$. Encontrar las cotas necesarias de $|f'|$ y $|f''|$ para determinar un valor inicial de modo que el método N-R converja a la raíz. Aplicar el método para hallar una aproximación de ésta. ¿Cuál es el orden de convergencia?

5. Considerar la función $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. Determinar para qué valores de $x_0$ la iteración N-R es convergente, para cuáles es divergente, y cuándo se obtienen ciclos periódicos.

6. Se quiere resolver la ecuación $f(x) = 0$, donde $f(x) = e^x - 2$. Calcular los 10 primeros términos de las sucesiones generadas por los métodos N-R y de la secante, comenzando con los valores iniciales $x_1 = 3$ para el primer método e $y_1 = 3, y_2 = 2.3$ para el segundo. Graficar simultáneamente las dos sucesiones obtenidas.

7. Sea $f$ una función $C^1$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión que se obtiene de aplicar el método N-R a $f$. Supongamos que $x_n$ converge a $r$ y $f'(r) \neq 0$, mostrar que $r$ es raíz de $f$.

8. Sea $f$ una función suave, y $a$ tal que $f(a) = 0$, y $f'(a) \neq 0$.
   (a) Suponiendo que en $(a, b]$, $f$, $f'$, $f''$ son positivas, probar que la iteración de N-R generada a partir de $x_0 \in (a, b)$ converge decrecientemente hacia $a$.
   (b) Con las mismas hipótesis, si $x_1 \in (a, x_0)$, probar que la sucesión generada por el método de la secante a partir de $x_0$, $x_1$ converge decrecientemente hacia $a$.

9. Sea $f(x) = x^\alpha$. Se desea utilizar el método N-R para resolver la ecuación $f(x) = 0$, comenzando con $x_0 > 0$. Analizar el comportamiento del método en los casos
   (a) $\alpha \geq 1$ (b) $\alpha = \frac{1}{3}$ (c) $\alpha = \frac{1}{2}$

10. (a) Sea $f(x) = (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_d)$ donde $r_1 < r_2 < \dots < r_d$. Probar que si $x_0 > r_d$ la sucesión de N-R converge a $r_d$.

    (b) Para un polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$, $P(x) = a_d x^d + \dots + a_0, a_d \neq 0$, tal que sus $d$ raíces son reales y distintas, se propone el siguiente método que aproxima los valores de todas sus raíces:

      i. Se comienza con un valor $x_0$ mayor que $M = \max\{1, \sum_{i=0}^{d-1} \frac{|a_i|}{|a_d|}\}$ (Dato: $M$ es una cota para el módulo de todas las raíces del polinomio).

      ii. Se genera a partir de $x_0$ la sucesión de N-R, que, según el ítem anterior, converge a la raíz más grande de $P$, llamémosla $r_d$; obteniéndose de este modo un valor aproximado $\tilde{r}_d$.

      iii. Se divide $P$ por $x - \tilde{r}_d$ y se desprecia el resto, dado que $r_d \sim \tilde{r}_d$. Se redefine ahora $P$ como el resultado de esta división y se comienza nuevamente desde el primer ítem, para hallar las otras raíces.

    Aplicar este método para aproximar todas las raíces del polinomio $P(x) = 2x^3 - 4x + 1$.

11. Recordar que una raíz múltiple de un polinomio $f$ es una raíz simple del polinomio $f/\mathrm{mcd}(f, f')$, donde mcd indica el máximo común divisor. Hacer un programa en `Matlab` que aplique el método N-R a $f(x)$ y a $f(x)/\mathrm{mcd}(f, f')$ para hallar la raíz múltiple de

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)^2.$$

    Demostrar que, a pesar que la función $f$ no está en las hipótesis del método N-R, éste converge (aunque no tan velozmente como cuando la raíz múltiple se halla como solución de $f/\mathrm{mcd}(f, f')$).

12. Para $f$ una función $C^2$ que tiene una raíz de orden 2 en $x_0$:

    (a) Demostrar que el método N-R converge sólo linealmente a $x_0$.

    (b) ¿Cuál es el orden de convergencia de la siguiente modificación?

$$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

13. Sea $f(x) = 4x^3 - 3x + 1 = 0$. La ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz doble. Aproximarla calculando las 10 primeras iteraciones de los métodos N-R y N-R con la modificación del ejercicio anterior, comenzando con los valores iniciales $x_1 = y_1 = 25$. Graficar simultáneamente las dos sucesiones obtenidas.

14. Se quiere aplicar el método N-R para dar una tabla de valores de la función $y(x)$ definida implícitamente por la ecuación $G(x, y) = 0$ en un intervalo $[a, b]$.

    El método consiste en comenzar la tabla en un par de valores $x_0, y_0$ que verifican $x_0 = a$ y $G(x_0, y_0) = 0$ y proceder por incrementos en $x$ hasta llegar al valor $x_N = b$.

    En cada paso se obtiene el valor de $y_{n+1}$ aplicando el método N-R a la función $G(x_{n+1}, y)$ donde $y$ es la variable y $x_{n+1}$ permanece fijo; con valor inicial el valor de $y_n$ obtenido en el paso anterior. Dado que la función $y(x)$ se supone continua, esta elección del valor inicial se supone apropiada.

(a) Aplicar el método para la ecuación $G(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, comenzando en $x_0 = 0, y_0 = 1$ para valores de $x$ en $[0, 1]$. Graficar junto con la solución que se obtiene de despejar analíticamente y comparar. Utilizar distintos valores para el incremento y para la cantidad de iteraciones del método N-R en cada paso.

(b) Aplicar el método para $G(x, y) = 3x^7 + 2y^5 - x^3 + y^3 - 3$. Comenzar la tabla en $x_0 = 0, y_0 = 1$ y proceder por incrementos en $x$ de 0.2 hasta llegar a $x_{50} = 10$.

15. Dada $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ el método N-R generalizado consiste en realizar la iteración vectorial

$$x^{k+1} = x^k - (DF|_{x^k})^{-1}.F(x^k),$$

donde $(DF|_{x^k})^{-1}$ es la inversa de la matriz diferencial de $F$ evaluada en $x^k$.

Usar la versión generalizada a varias variables del método N-R para para resolver el sistema de ecuaciones

$$2x - 3y = 0, \quad x^2 - y^2 - 3 = 0$$

comenzando con valores iniciales $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

16. Resolver $\cos(x) = 2x$, $x > 0$ comenzando con $x_0 = 0.5$ y utilizando:

(a) La iteración de punto fijo $x_{n+1} = \frac{1}{2}\cos(x_n)$

(b) El método N-R.

Graficar, usando `Matlab`, las sucesiones obtenidas y comparar.

17. Sea $g$ una función tal que $g'$ es continua en $[s, b]$, donde $s$ es un punto fijo de $g$. Si además, se verifica que $0 \leq g'(x) \leq K < 1$ para todo $x \in [s, b]$, mostrar que la iteración, comenzando con $x_0 \in [s, b]$, converge decrecientemente a $s$.

18. Sea $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \dfrac{8x - 1}{x} - e^x$.

(a) Dibujar la gráfica de $f$ y determinar el número de raíces de la ecuación $f(x) = 0$, localizando cada raíz entre dos enteros consecutivos.

(b) Para cada una de las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \frac{1}{8}(1 + xe^x), \quad f_2(x) = \ln\left(\frac{8x - 1}{x}\right)$$

consideramos el siguiente método iterativo: dado $x_0 = 1$ sea

$$x_{n+1} = f_i(x_n), \; n \in \mathbb{N}, \; (i = 1, 2).$$

Estudiar si estas sucesiones convergen hacia alguna de las raíces de $f = 0$.

(c) Utilizando `Matlab`, estimar las raíces con estos dos métodos.

19. Sea $f(x) = x^3 - x - 1$. Se consideran las dos siguientes iteraciones de método de punto fijo.

$$g(x) = x^3 - 1, \qquad h(x) = \sqrt[3]{x + 1}.$$

(a) Determinar cuáles de estas funciones son apropiadas para la iteración.

(b) Para las que sí lo sean:

- Determinar un intervalo inicial $I$ en el cual el método converja.
- Dar un valor inicial $x_0 \in I$ y la cantidad de iteraciones necesarias para aproximar la raíz de $f$ con error menor que $10^{-5}$ comenzando con el $x_0$ dado.

20. Dada la función $f(x) = x + 1/x - 2$, $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, se construye el siguiente algoritmo para aproximar la raíz $r = 1$:

$$x_{n+1} = 2 - 1/x_n$$

(a) Verificar que si $x_0 > 1$ entonces la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente por 1. Concluir que $x_n \to 1$, aunque esta iteración no está en las hipótesis del teorema del punto fijo. ¿Qué hipótesis no se cumple?

(b) Dar un algoritmo para aproximar la raíz de $f$ que converja cuadráticamente.

21. Sea $f$ una función $C^1$ en las condiciones del método N-R. Sea $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Mostrar que el método N-R es un método de punto fijo.