# Elementos de Cálculo Numérico

## Práctica N°2: Normas y condicionamiento de una matriz - Eliminación de Gauss y descomposición LU.

1. Calcular la norma 2 de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Se quiere estimar la norma 2 de una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ como el máximo del valor $\|Ax\|_2/\|x\|_2$ entre varios vectores $x \in \mathbb{R}^3$ no nulos generados al azar. Hacer un programa que pida el ingreso de una matriz $A$ y luego

   - genere los primeros 100 términos de la siguiente sucesión:
   $$s_1 = 0, \quad s_{k+1} = \max\left\{s_k, \frac{\|Ax_k\|_2}{\|x_k\|_2}\right\}$$
   donde los $x_k \in \mathbb{R}^3$ son vectores no nulos generados al azar.
   - grafique la sucesión calculada, junto con el valor exacto de la norma de la matriz.

   Recordar que tanto la norma de un vector como de una matriz se calculan en `Matlab` con el comando **norm**. Tener en cuenta que se debe chequear correctamente que los vectores generados al azar (comando **rand**) resulten no nulos.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$. Calcular $cond_2(A)$ y $cond_\infty(A)$.

4. Probar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz inversible y $\|\ \|$ es una norma matricial, la condición de $A$ verifica la desigualdad:
$$\frac{1}{cond(A)} \leq \inf\left\{\frac{\|A - B\|}{\|A\|} : B \text{ es singular}\right\}$$

   Nota: Más aún, vale la igualdad, pero la otra desigualdad es un poco más complicada de probar. De dicha igualdad se puede concluir que $cond(A)$ mide la distancia relativa de $A$ a la matriz singular más próxima.

5. (a) Mostrar que $cond_\infty(A) \to \infty$ cuando $\varepsilon \to 0$ para
$$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\varepsilon \\ 2 & 3 & 4 \\ 1-\varepsilon & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Concluir que la condición de las matrices $A$ y $B$ del ítem anterior tienden a infinito, cualquiera sea la norma considerada.

6. Sea $A$ la matriz del ejercicio 3. Se quiere resolver el sistema $Ax = b$ para un valor de $b \neq 0$ que se conoce con una precisión mayor que $10^{-3}$; es decir, se conoce el valor conjunto de $b + \Delta b$ y se sabe que el error relativo $\dfrac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} < 10^{-3}$.

   (a) Estimar el error relativo de la solución hallada $\tilde{x} = x + \Delta x$.

   (b) Encuentre un ejemplo para $b$ y $\Delta b \neq 0$ de modo que $\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2}$ sea exactamente $cond_2(A)\frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2}$.

7. Sea $x$ la solución exacta al sistema $Ax = b$ y $\tilde{x}$ la solución obtenida numéricamente. Se llama "vector residual" a $r := b - A\tilde{x}$. Si $e = x - \tilde{x}$ se tiene $Ae = r$. Mostrar que:
$$\frac{1}{cond(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq cond(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}.$$
   Concluir que para una matriz mal condicionada los métodos numéricos no aseguran buena aproximación.

8. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se definen $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 + \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}$, $b_n = (1, 2 - \frac{1}{n^2})$ y se quiere resolver el sistema $A_n x = b_n$. Utilizando cierto método numérico se obtiene como resultado el vector $(1, 0)$.

   (a) Calcular el vector residual producido por esta solución tentativa. ¿Puede decirse que para $n$ grande la solución es razonablemente confiable?

   (b) Resolver $A_n x = b_n$ en forma exacta, calcular $cond_\infty(A_n)$ y verificar la cota de error del ejercicio 7.

9. Sea $D_n$ la matriz diagonal de $n \times n$ con elementos diagonales iguales a $1/10$. Calcular el determinante de $D_n$ y ver que $det(D_n) \to 0$ si $n \to \infty$. ¿$D_n$ está mal condicionada?

10. (a) Escribir un programa en `Matlab` que resuelva un sistema $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ usando eliminación gaussiana sin pivoteo.

    (b) Adaptar el programa del ítem anterior para que calcule la matriz $A^{-1}$.

11. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se quiere calcular la solución del sistema lineal:
$$\begin{aligned} 10^{-n}x + 2y &= 8 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$
    utilizando eliminación gaussiana sin pivoteo, con aritmética de punto flotante de 3 dígitos y sistema de redondeo.

    (a) Para $n = 2$ y $n = 3$, analizar si el resultado difiere significativamente de la solución real.

    (b) Para $n = 3$, repetir el método de eliminación gaussiana eligiendo el pivote más conveniente.

12. Obtener la descomposición $LU$ de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & 10 & -1 & -1 \\ 6 & 10 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ de las siguientes dos maneras:

    (a) mediante el algoritmo de eliminación gaussiana,

    (b) despejando los coeficientes de $L$ y $U$ ordenadamente.

13. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz que admite descomposición $LU$.

    (a) Estimar cuántas operaciones se necesitan para calcular esta descomposición de $A$, despejando los coeficientes de $L$ y $U$.

    (b) Se quiere calcular el determinante de $A$. Para $n \geq 2$, mostrar que si esto se hace mediante el desarrollo sucesivo por alguna fila o columna, entonces se requieren más de $n!$ operaciones. Estimar cuántas operaciones se necesitan para calcularlo si se utiliza la descomposición $LU$.

14. Demostrar que si todos los menores principales de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son no singulares, entonces ésta admite descomposición $LU$.

15. Probar que la matriz no singular:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

    no tiene una descomposición $LU$, mientras que la matriz singular $A - I$ sí la tiene. Dar la matriz de permutaciones $P$ tal que $PA$ tenga una factorización $LU$.

16. Considerar el algoritmo de eliminación gaussiana sin pivoteo aplicado a un sistema $Ax = b$ donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz tridiagonal. Demostrar que si $A$ es además estrictamente diagonal dominante, entonces durante la ejecución del algoritmo no se encuentra ningún pivote nulo. (Ayuda: demostrar que si $A$ es estrictamente diagonal dominante, entonces luego de hacer cada etapa de la eliminación la matriz resultante también lo es.)

17. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz tridiagonal tal que en el proceso de eliminación gaussiana no se encuentra ningún pivote nulo. Demostrar que $A$ admite descomposición $LU$ con $L$ y $U$ también tridiagonales.

18. Adaptar el programa del ejercicio 10 para que resuelva un sistema de ecuaciones $Ax = b$, donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz tridiagonal. Utilizar el comando **flops** de `Matlab` para conocer la cantidad de operaciones efectuadas y comparar con las que se requieren al resolver el mismo sistema utilizando los comandos **inv** y \, que no están especialmente pensados para matrices tridiagonales.

19. La $n$-ésima matriz de Hilbert $H_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se define de la siguiente manera

$$(H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}.$$

Estas matrices son un ejemplo de matrices mal condicionadas y por tal motivo se las utiliza habitualmente para testear rutinas numéricas.

   (a) Demostrar que $cond_\infty(H_n) \geq n^2$.

   (b) Utilizar su programa del ejercicio 10 para calcular la inversa de la matriz de Hilbert $H_9$. Verificar su resultado calculando los productos $H_9 H_9^{-1}$ y $H_9^{-1} H_9$. Comparar con el resultado obtenido mediante el comando **inv**.

Nota: En realidad, $cond_\infty(H_n)$ es mucho mayor que $n^2$. Estas matrices pueden obtenerse en `Matlab` mediante el comando **hilb**($n$) y su condición infinito puede calcularse con el comando **cond**.

20. Considerar el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizando el comando **lu** de `Matlab`, verificar que la eliminación gaussiana puede crear elementos no nulos en lugares donde inicialmente había ceros (es decir, se produce una matriz densa a pesar de partir de una matriz rala). En muchas aplicaciones, uno debe resolver un sistema de ecuaciones lineales del orden de $10^4 \times 10^4$ donde hay a lo sumo 5 elementos no nulos por fila. Es decir, hay a lo sumo $5 \times 10^4$ elementos no nulos en la matriz, cifra bastante inferior a la cantidad total de elementos. Calcular qué cantidad de bytes (2 bytes por elemento) ocuparía una matriz densa de esas dimensiones. Este tipo de situación motiva el estudio de métodos de resolución de sistemas con matrices ralas que no involucren un llenado excesivo.

21. Utilizar el Teorema de Cholesky para demostrar que las siguientes propiedades de una matriz son equivalentes:

   - A es simétrica y definida positiva
   - hay un conjunto de vectores linealmente independientes $x^1, x^2, \cdots, x^n$ de $\mathbb{R}^n$, tales que $a_{ij} = (x^i)^t x^j$.

22. Considerar la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$.

Mostrar que es definida positiva y calcular su descomposición de Cholesky.

23. Estimar cuántas operaciones se requieren para hallar la descomposición de Cholesky de una matriz simétrica y definida positiva $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.