Elementos de Cálculo Numérico

Práctica N°3: Métodos iterativos: Jacobi / Gauss-Seidel.

1. Escribir un programa que implemente el método de Jacobi y otro que implemente el método de Gauss-Seidel para la resolución de un sistema lineal $Ax = b$, con las siguientes condiciones:

   - que indique si el método resulta o no convergente para la matriz A,
   - que incluya una restricción al número de iteraciones,
   - que finalice si el método se estaciona.

   (Sugerencia: utilizar los comandos **tril**, **diag** y **eig** de `Matlab`)

2. Hacer un programa que pida el ingreso de una matriz A y un vector b y luego

   - calcule las matrices de iteración de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel.
   - calcule el menor de los radios espectrales de las dos matrices anteriores y, si este valor resulta menor a 1, entonces realice las primeras 10 iteraciones del método correspondiente (o de cualquiera de los dos métodos en caso de que los radios espectrales resulten coincidentes), con valor inicial el vector nulo.

3. Decidir para cada uno de los siguientes sistemas, si los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel son convergentes. En caso afirmativo usarlos para resolver el sistema. Si ambos métodos convergen, determinar cuál converge más rápido. ¿Es la matriz del sistema diagonal dominante? ¿y simétrica y definida positiva?

   (a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$

4. Dar ejemplos donde converja el método de Jacobi y no lo haga el de Gauss-Seidel y viceversa.

5. Considerar el sistema $Ax = b$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ y $b = (8, 21)$. Mostrar que el método de Jacobi converge; hacer un programa que lo modele y a la vez grafique en el plano la sucesión de aproximaciones obtenidas empezando en cada uno de lo siguientes valores iniciales

   (a) $x_0 = (1, 4)$ (b) $x_0 = (1, 0)$ (c) $x_0 = (5, 2)$

6. Considerar el sistema $\begin{cases} x - y = & 0 \\ x + y = & 0 \end{cases}$. Estudiar autovalores y autovectores de la matriz de iteración asociada al método de Gauss-Seidel, decidir si el método es

convergente o no y, sin hacer cálculos, predecir el comportamiento de las sucesiones que se obtienen con los siguientes valores iniciales.

(a) $x_0 = (2, 0)$ (b) $x_0 = (-0.03, 0.03)$ (c) $x_0 = (0, 1)$

Decidir si en este caso el método de Jacobi resulta convergente.

7. (a) Mostrar que toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $\det(A) > 1$ tiene un autovalor λ, real o complejo, con $|\lambda| > 1$.

   (b) Decidir si el método de Jacobi converge o no para un sistema dado por la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ c & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Probar que $\lim_{n\to\infty} B^n = 0$ si y sólo si $|b| < \sqrt{2}/2$.

   (b) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre $a, c \in \mathbb{R}$ para la convergencia de los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel aplicados a la resolución de $Ax = v$.

9. (a) Probar que si A tiene una base de autovectores v_i, con autovalores λ_i, la matriz

$$B = I + sA, \quad s \in \mathbb{R}$$

   tiene los mismos autovectores, con autovalores $\nu_i = 1 + s\lambda_i$.

   (b) Sabiendo que los autovalores de la matriz $A \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & \cdot & \cdot & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   son $\lambda_j = -4\sin^2(\frac{\pi j}{2n})$, $j = 1, \ldots, n-1$, decidir si el método de Jacobi aplicado a $Ax = b$ es convergente o no.

   (c) Decidir si el método de Gauss-Seidel resulta convergente. En caso afirmativo, ¿qué método converge más rápido?

   Comentario: Este problema es interesante por sus aplicaciones, pues corresponde a la discretización de la ecuación de Poisson en una dimensión espacial:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} = f(x), & x \in [0, 1]; \\[2ex] u(0) = u(1) = 0. & \end{cases}$$

10. Sea B_J la matriz asociada al método de Jacobi de un sistema dado. Estimar

    (a) cuántas multiplicaciones y divisiones se requieren para calcular B_J.

    (b) cuántas multiplicaciones y divisiones se requieren para para realizar una iteración con el método de Jacobi.

    (c) si $\rho(B_J) < 1$, cuántas iteraciones se necesitan para reducir el error del método en más de 10^{-m} (en función de $\rho(B_J)$).

    (d) cuántas multiplicaciones y divisiones se requieren para calcular la solución del sistema por el método de eliminación gaussiana.

    (e) cuántas iteraciones del método de Jacobi podrían realizarse antes de igualar la cantidad de operaciones necesarias al usar el método de eliminación gaussiana.

11. Sean B_J y B_{GS} las matrices asociadas al método de Jacobi y de Gauss-Seidel respectivamente del sistema $Ax = b$.

    (a) Mostrar que si $A(i,k) = 0$ entonces, el elemento $B_J(i,k) = 0$. Notar que si A es una matriz rala (con muchos ceros) entonces B_J también lo es. Luego, en cada iteración se requieren pocas multiplicaciones.

    (b) Mostrar que $\lambda = 0$ siempre es un autovalor de B_{GS}. ¿De qué autovector?

12. Dada una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

y un vector $b \in \mathbb{R}^3$, se quiere resolver el sistema de ecuaciones $Ax = b$; para lo cual se considera el siguiente método iterativo, que es un caso particular de los métodos llamados *Jacobi por bloques*:

$$x_{k+1} = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \cdot x_k + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \cdot b,$$

Este método resulta convergente para los siguientes datos:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ -3 & 9 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} -20 \\ 62 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hacer un programa que calcule la sucesión de aproximaciones generada con valor inicial el vector nulo y que se detenga cuando $\|x_{k+1} - x_k\|_\infty \leq 10^{-4}$ (es decir, cuando la iteración "se estabiliza").

13. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar que $\lambda = 1$ es autovalor de la matriz de Jacobi (o Gauss-Seidel) de A si y solo si A es no inversible.

14. Para resolver el sistema $Ax = b$, se utiliza un método iterativo cuya matriz de iteración J es diagonalizable y satisface $\rho(J) < 1$. Sea e_k el vector error en el k-ésimo paso.

    (a) Demostrar que $\|e_k\|_\infty = O(\rho(J)^k)$.

(b) Probar que si $e_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\rho(J) \neq 0$, la sucesión $(\|e_k\|_\infty)_{k \in \mathbb{N}}$ tiende a 0 linealmente.

15. Utilizar la iteración de Gauss-Seidel para resolver el sistema $A_n x = b_n$ para

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 + \frac{1}{n^2} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad b_n = (1, 2 - \frac{1}{n^2}).$$

¿Cómo es la convergencia? ¿Tiene ésto que ver con el mal condicionamiento de A? Dar un ejemplo de una matriz mal condicionada para la cual la convergencia sea rápida.

16. Considerar el sistema $Ax = b$ para $A = \begin{pmatrix} 64 & -6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ y $b = (1, 2)$.

(a) Demostrar que el método de Jacobi converge para todo dato inicial. Verificar, sin embargo, que la matriz no es diagonal dominante.

(b) Sea J la matriz de iteración. Hallar las normas 1, ∞ y 2 de J. Hallar una norma $\| \ \|$ en la cual $\|J\|$ sea < 1.