

## ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO

### Práctica N°4: Resolución de ecuaciones no-lineales.

1. Elegir un intervalo apropiado y utilizar el método de bisección para hallar una raíz positiva de la ecuación trascendente:

$$2x = \tan(x)$$

¿Cuántos pasos hay que hacer para garantizar que el error sea menor que  $10^{-5}$ ?

2. Hacer un programa en `Matlab` que ejecute los primeros 20 pasos de los métodos de bisección y Regula-Falsi para hallar una raíz de la ecuación  $2x^3 + x - 2 = 0$  comenzando con el intervalo  $[0, 1]$ .
3. Para  $f(x) = -2x^3 + 6x - 1$  se desea aproximar la raíz  $r \in (0, 1)$  utilizando el método de bisección comenzando con  $a_0 = 0$  y  $b_0 = 1$ . Determinar una cantidad de pasos a seguir para poder asegurar que  $|f(a_n)| < 10^{-100}$  y  $|f(b_n)| < 10^{-100}$ .
4. Hacer un programa en `Matlab` para aproximar  $\sqrt[3]{2}$  que ejecute los primeros 20 pasos del método de bisección, comenzando con el intervalo  $[1, 2]$ , y del método N-R, comenzando con  $x_0 = 2$ .
5. Considerar la función  $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$ . Determinar para qué valores de  $x_0$  la iteración N-R es convergente, para cuáles es divergente, y cuándo se obtienen ciclos periódicos.
6. Sea  $f$  una función  $C^1$  y sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión que se obtiene de aplicar el método N-R a  $f$ . Supongamos que  $x_n$  converge a  $r$  y  $f'(r) \neq 0$ , mostrar que  $r$  es raíz de  $f$ .
7. Demostrar que la ecuación

$$f(x) = e^x + 5 \sin x - 2 = 0$$

tiene una única raíz  $r$  en el intervalo  $(0, \frac{3}{2})$ . Encontrar un valor inicial en este intervalo de modo que el método N-R converja a  $r$  (para ello, calcular cotas necesarias para  $|f'|$  y  $|f''|$  en el intervalo). Aplicar el método para hallar una aproximación de  $r$ . ¿Cuál es el orden de convergencia?

8. La ecuación  $x^3 + \cos(x) + 7x = 0$  tiene una única raíz real.
  - Demostrar que el método de Newton-Raphson converge para todo valor inicial en  $(-1, 0)$ .
  - Demostrar que si  $x_0 = -0.5$ , el error  $n$ -ésimo es menor o igual que  $\frac{12}{7}(\frac{7}{24})^{2^n}$ .
  - Calcular cuántos pasos del método son necesarios para aproximar la solución con error menor o igual que  $10^{-100}$ .
9. Sea  $f$  una función suave, y  $a$  tal que  $f(a) = 0$ , y  $f'(a) \neq 0$ . Suponiendo que en  $(a, b]$ ,  $f$ ,  $f'$ ,  $f''$  son positivas, probar que la iteración de N-R generada a partir de  $x_0 \in (a, b)$  converge decrecientemente hacia  $a$ .

10. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x + 1)e^x - 4$ .

- (a) Probar que el método de Newton-Raphson es convergente para todo  $x_0 > 1$ .
- (b) Analizar la convergencia del método si se toma como valor inicial  $x_0 = -3$ .

11. Sea  $f(x) = x^\alpha$ . Se desea utilizar el método N-R para resolver la ecuación  $f(x) = 0$ , comenzando con  $x_0 > 0$ . Analizar el comportamiento del método en los casos

- (a)  $\alpha \geq 1$
- (b)  $\alpha = \frac{1}{3}$
- (c)  $\alpha = \frac{1}{2}$

12. (a) Sea  $P(x) = (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_d)$  donde  $r_1 < r_2 < \dots < r_d$ . Probar que si  $x_0 > r_d$  la sucesión de N-R converge a  $r_d$ .

(b) Para un polinomio  $P \in \mathbb{R}[x]$ ,  $P(x) = a_d x^d + \dots + a_0$ ,  $a_d \neq 0$ , tal que sus  $d$  raíces son reales y distintas, se propone el siguiente método que aproxima los valores de todas sus raíces:

- i. Se comienza con un valor  $x_0$  mayor que  $M = \max\{1, \sum_{i=0}^{d-1} \frac{|a_i|}{|a_d|}\}$  (Dato:  $M$  es una cota para el módulo de todas las raíces del polinomio).
- ii. Se genera a partir de  $x_0$  la sucesión de N-R, que, según el ítem anterior, converge a la raíz más grande de  $P$ , llamémosla  $r_d$ ; obteniéndose de este modo un valor aproximado  $\tilde{r}_d$ .
- iii. Se divide  $P$  por  $x - \tilde{r}_d$  y se desprecia el resto, dado que  $r_d \sim \tilde{r}_d$ . Se redefine ahora  $P$  como el resultado de esta división y se comienza nuevamente desde el primer ítem, para hallar las otras raíces.

Aplicar este método para aproximar todas las raíces del polinomio  $P(x) = 2x^3 - 4x + 1$ .

13. Se quiere aplicar el método N-R para dar una tabla de valores de la función  $y(x)$  definida implícitamente por la ecuación  $G(x, y) = 0$  en un intervalo  $[a, b]$ .

El método consiste en comenzar la tabla en un par de valores  $x_0, y_0$  que verifican  $x_0 = a$  y  $G(x_0, y_0) = 0$  y proceder por incrementos en  $x$  hasta llegar al valor  $x_N = b$ .

En cada paso se obtiene el valor de  $y_{n+1}$  aplicando el método N-R a la función  $G(x_{n+1}, y)$  donde  $y$  es la variable y  $x_{n+1}$  permanece fijo; con valor inicial el valor de  $y_n$  obtenido en el paso anterior. Dado que la función  $y(x)$  se supone continua, esta elección del valor inicial se supone apropiada.

- (a) Aplicar el método para la ecuación  $G(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ , comenzando en  $x_0 = 0, y_0 = 1$  para valores de  $x$  en  $[0, 1]$ . Graficar junto con la solución que se obtiene de despejar analíticamente y comparar. Utilizar distintos valores para el incremento y para la cantidad de iteraciones del método N-R en cada paso.
- (b) Aplicar el método para  $G(x, y) = 3x^7 + 2y^5 - x^3 + y^3 - 3$ . Comenzar la tabla en  $x_0 = 0, y_0 = 1$  y proceder por incrementos en  $x$  de 0.2 hasta llegar a  $x_{50} = 10$ .

14. Dada  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  el método N-R generalizado consiste en realizar la iteración vectorial

$$x^{k+1} = x^k - (DF|_{x^k})^{-1} \cdot F(x^k),$$

donde  $(DF|_{x^k})^{-1}$  es la inversa de la matriz diferencial de  $F$  evaluada en  $x^k$ .

Usar la versión generalizada a varias variables del método N-R para resolver el sistema de ecuaciones

$$2x - 3y = 0, \quad x^2 - y^2 - 3 = 0$$

comenzando con valores iniciales  $(x_0, y_0) = (2, 1)$ .

15. Aproximar la solución positiva de la ecuación  $\cos(x) = 2x$ , comenzando con  $x_0 = 0.5$  y utilizando la iteración de punto fijo  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cos(x_n)$ . Graficar con **Matlab** la sucesión obtenida.
16. Sea  $f(x) = x^3 - x - 1$ . La ecuación  $f(x) = 0$  tiene una única raíz en el intervalo  $(1, 2)$ . Se consideran las dos siguientes iteraciones del método de punto fijo para aproximar dicha raíz.

$$g(x) = x^3 - 1, \quad h(x) = \sqrt[3]{x + 1}.$$

(a) Determinar cuáles de estas funciones son apropiadas para la iteración.

(b) Para las que sí lo sean:

- Determinar un intervalo inicial  $I$  en el cual el método converja.
- Dar un valor inicial  $x_0 \in I$  y la cantidad de iteraciones necesarias para aproximar la raíz de  $f$  con error menor que  $10^{-5}$  comenzando con el  $x_0$  dado.

17. Sea  $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x) = \frac{8x - 1}{x} - e^x$ .

(a) Dibujar la gráfica de  $f$  y determinar el número de raíces de la ecuación  $f(x) = 0$ , localizando cada raíz entre dos enteros consecutivos.

(b) Para cada una de las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \frac{1}{8}(1 + xe^x), \quad f_2(x) = \ln\left(\frac{8x - 1}{x}\right)$$

consideramos el siguiente método iterativo: dado  $x_0 = 1$  sea

$$x_{n+1} = f_i(x_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (i = 1, 2).$$

Estudiar si estas sucesiones convergen hacia alguna de las raíces de  $f = 0$ .

(c) Utilizando **Matlab**, estimar las raíces con estos dos métodos.

18. Sea  $g$  una función tal que  $g'$  es continua en  $[s, b]$ , donde  $s$  es un punto fijo de  $g$ . Si además, se verifica que  $0 \leq g'(x) \leq K < 1$  para todo  $x \in [s, b]$ , mostrar que la iteración, comenzando con  $x_0 \in [s, b]$ , converge decrecientemente a  $s$ .
19. Sea  $f$  una función  $C^1$  en las condiciones del método N-R. Sea  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ . Mostrar que el método N-R es un método de punto fijo.

20. Para  $f$  una función  $C^2$  que tiene una raíz de orden 2 en  $r$ :

(a) Demostrar que el método N-R converge sólo linealmente a  $r$  (Sugerencia: Notar que en este caso la  $g$  del ejercicio anterior no está definida para  $x = r$ , redefinirla como  $g(r) = r$ , probar la diferenciabilidad de  $g$  y demostrar que  $g'(r) \neq 0$ ).

(b) ¿Cuál es el orden de convergencia de la siguiente modificación?

$$x_{n+1} = x_n - 2 \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

21. Sea  $f(x) = 4x^3 - 3x + 1 = 0$ . La ecuación  $f(x) = 0$  tiene una raíz doble. Aproximarla calculando las 10 primeras iteraciones de los métodos N-R y N-R con la modificación del ejercicio 20, comenzando con los valores iniciales  $x_1 = y_1 = 25$ . Graficar simultáneamente las dos sucesiones obtenidas.

22. Recordar que una raíz múltiple de un polinomio  $f$  es una raíz simple del polinomio  $f/\text{mcd}(f, f')$ , donde  $\text{mcd}$  indica el máximo común divisor. Hacer un programa en **Matlab** que aplique el método N-R a  $f(x)$  y a  $f(x)/\text{mcd}(f, f')$  para hallar la raíz múltiple de

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)^2.$$

Demostrar que, a pesar que la función  $f$  no está en las hipótesis del método N-R, éste converge (aunque no tan velozmente como cuando la raíz múltiple se halla como solución de  $f/\text{mcd}(f, f')$ ).

23. Dada la función  $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2$ ,  $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ , se construye el siguiente algoritmo para aproximar la raíz  $r = 1$ :

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$$

(a) Verificar que si  $x_0 > 1$  entonces la sucesión  $\{x_n\}$  es monótona decreciente y acotada inferiormente por 1. Concluir que  $x_n \rightarrow 1$ , aunque esta iteración no está en las hipótesis del teorema del punto fijo. ¿Qué hipótesis no se cumple?

(b) Dar un algoritmo para aproximar la raíz de  $f$  que converja cuadráticamente.

24. Con las mismas hipótesis que en el ejercicio 9, probar que si  $x_1 \in (a, x_0)$ , la sucesión generada por el método de la secante a partir de  $x_0$  y  $x_1$  converge decrecientemente hacia  $a$ .

25. Se quiere resolver la ecuación  $f(x) = 0$ , donde  $f(x) = e^x - 2$ . Calcular los 10 primeros términos de las sucesiones generadas por los métodos N-R y de la secante, comenzando con los valores iniciales  $x_1 = 3$  para el primer método e  $y_1 = 3, y_2 = 2.3$  para el segundo. Graficar simultáneamente las dos sucesiones obtenidas.