

## ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO

### Práctica N°8: Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias

1. Utilizar el método de Euler para resolver  $\begin{cases} y' = 2y & \text{en } [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$

empleando pasos  $h = 0.1$ ,  $h = 0.05$  y  $h = 0.01$ . Graficar las tres soluciones numéricas obtenidas junto con la solución exacta.

2. Hacer el mapa de curvas integrales en la región  $[0, 10] \times [0, 10]$  de la ecuación diferencial

$$y'(t) = (y(t) - 5) \cdot (\cos^2(t) - 0.5),$$

graficando simultáneamente, para  $k = 0, 1, \dots, 10$ , la solución que se obtiene utilizando el método de Euler con paso  $h = 0.01$  y con condición inicial

$$y(0) = k.$$

3. Considerar el problema  $\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ .

(a) Probar que el método de Euler con paso  $h$  genera la sucesión:

$$y_i = (1 + \lambda h)^i y_0 \quad i = 0, 1, \dots$$

(b) Mostrar que si  $\lambda < 0$ , la solución exacta tiende a cero a medida que  $x$  crece.

(c) Para  $\lambda < 0$ , determinar para qué valores de  $h$  ocurre que  $y_i \rightarrow 0$  cuando  $i \rightarrow \infty$ .

4. Se considera el problema

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + t^2 + 3 & \text{en } [0, 2] \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

(a) Demostrar que la solución es una función convexa.

(b) Utilizar los métodos de Euler explícito e implícito, con paso  $h = 0.05$  para obtener dos aproximaciones de la solución y graficarlas. Decidir en que región del gráfico deberá situarse la solución analítica del problema.

(c) Graficar la solución que se logra al utilizar el comando **ode45** de **Matlab**.

5. Se considera la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) - 5 \sin(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

cuya solución exacta es la función  $y(t) = 2 \sin(t) + \cos(t)$ . Graficar simultáneamente en el intervalo  $[0, 4]$  la solución exacta y las que se obtienen con los métodos de Euler y Taylor de orden 2, ambos con paso  $h = 0.05$ .

6. Escriba un programa que resuelva la ecuación diferencial del Ejercicio 5 por algún método de Runge-Kutta de orden 2 y de orden 4. Agregar estas soluciones al gráfico realizado en dicho ejercicio.

7. Verificar que la función error, **erf**, puede ser definida como la solución de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Utilizar un método de Runge-Kutta de orden 2 para hallar  $\text{erf}(t_i)$  con  $t_i = 0, 0.05, 0.1, 0.15, \dots, 1$ . Comparar con los valores obtenidos directamente con el comando **erf** de **Matlab**.

8. Probar que los métodos de Euler, Runge-Kutta y Taylor son consistentes.

9. Hallar el error local para los métodos de Euler explícito e implícito.

10. Se quiere estimar, aplicando el método de Euler, el valor de  $e$  como  $y(1)$  donde  $y(t)$  es solución de  $y' = y$ ,  $y(0) = 1$ . Hallar un paso  $h$  de modo que el error cometido resulte menor que  $10^{-3}$ . Realizar el mismo trabajo para el método de Taylor de orden 2.

11. Considerar el problema  $y' = -2ty$ ,  $y(0) = 1$ , con  $t \geq 0$ .

(a) Determinar una cota, en términos de  $h$ , para el error cometido si se usa el método de Euler para calcular  $y(1)$ .

(b) ¿Cómo debería tomar  $h$  si se desea que el error cometido sea menor que  $10^{-2}$ ?

(c) Calcular la solución en  $t = 1$  usando el valor de  $h$  obtenido en el item previo, y verificar las estimaciones previstas comparando con la solución exacta.

12. Repetir los items (a) y (b) del ejercicio anterior para el problema:

$$\begin{cases} y'(t) = t \sin^2(y(t)) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

13. La trayectoria de una partícula que se mueve en el plano está dada por las curvas  $(y_1(t), y_2(t))$ , donde las funciones  $y_1, y_2$  son la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_2(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) - y_2(t) \end{cases} .$$

Resolver este sistema en el intervalo  $[0, 20]$  con el método de Euler utilizando paso  $h = 0.05$  y graficar la trayectoria de la partícula, sabiendo que en tiempo  $t = 0$  se encontraba en el punto  $(1, -1)$ . Realizar nuevamente el gráfico utilizando la solución obtenida con el comando **ode45**.

14. Probar que una ecuación de orden  $n$  se puede escribir como un sistema de  $n$  ecuaciones de primer orden. Mostrar que un problema de valores iniciales para la primera se transforma en un problema de valores iniciales para el sistema.

15. Considerar el siguiente problema:

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad \text{con } y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Resolver la ecuación analíticamente y aproximar el valor  $y(1)$  con un método de Runge-Kutta de orden 2 para distintos valores de  $h$ .

16. Considerar la ecuación  $y'(t) = f(t, y(t))$ .

(a) Deducir la fórmula de Milne:

$$y_n = y_{n-2} + h\left(\frac{1}{3}f_n + \frac{4}{3}f_{n-1} + \frac{1}{3}f_{n-2}\right),$$

aproximando la integral

$$\int_{t_{n-2}}^{t_n} f(t, y(t)) dt = \int_{t_{n-2}}^{t_n} y'(t) dt = y(t_n) - y(t_{n-2}),$$

con la fórmula de Simpson. Sugerencia: Tener en cuenta el Ejercicio 16 de la Práctica 7.

(b) Proceder en forma análoga al ítem anterior y dar un método multipaso de la forma

$$y_{n+1} - y_n = h[Af_n + Bf_{n-1} + Cf_{n-2}].$$

(c) Analizar la convergencia (estabilidad y consistencia) de los métodos de los ítems anteriores y calcular su orden.

17. Analizar la convergencia de los siguientes métodos y calcular su orden.

• **Adams-Bashforth.**

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n).$$

• **Adams-Moulton.**

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(5f_{n+3} + 8f_{n+2} - f_{n+1}).$$

18. Considerar el método de 2 pasos

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + ay_n = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_{n+1}).$$

Determinar  $a, \beta_2, \beta_1, \beta_0$  de modo que el método resultante tenga orden 4.

19. Decidir si existe algún valor de  $a \in \mathbb{R}$  para el cual el siguiente método multipaso sea convergente:

$$y_{n+3} - 3y_{n+2} + (3 - a^2)y_{n+1} + (a^2 - 1)y_n = h[5f_{n+2} + (-a^2 - 5)f_n].$$