ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO

Adicionales Práctica 3

Ejercicio 1: Sea $A = D - P$ con

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Notar que resolver el sistema $Ax = b$ es equivalente a resolver el sistema $x = D^{-1}Px + D^{-1}b$. Demostrar que el método iterativo que resulta de esta descomposición converge cualquiera sea el dato inicial

ii) Demostrar que el método de Jacobi tambien converge.

Ejercicio 2: Dado el sistema $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$1 = a_{ii} > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

i) Demostrar que el método de Gauss-Seidel converge cualquiera sea el dato inicial.

ii) Demuestre que el método iterativo $x^{k+1} = (I - A)x^k + b$ converge cualquiera sea x_0.

iii) Considere $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ¿ Cuál de los dos métodos elegiría y porqué?

Ejercicio 3: Consideramos la descomposición $A = D + L + U$, siendo D diagonal, L triangular inferior estricta y U triangular superior estricta.

a) Pruebe que resolver el sistema $Ax = b$ es equivalente a resolver

$$\left(D + \tfrac{1}{2}L\right)x = -\left(\tfrac{1}{2}L + U\right)x + b$$

b) Consider el método de punto fijo

$$x_{n+1} = Bx_n + c$$

donde $B = -\left(D + \frac{1}{2}L\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}L + U\right)$ y $c = \left(D + \frac{1}{2}L\right)^{-1}b$.

Demuestre que $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de la matriz B **si y sólo si** λ es raíz de la ecuación

$$\det\left(\tfrac{1}{2}L + U + \lambda\left(D + \tfrac{1}{2}L\right)\right) = 0$$

c) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Demuestre que el método anterior converge si y sólo si $a^2 < 1/2$.

d) Verifique que el método de Gauss-Seidel satisface la misma condición del ítem anterior sobre el parámetro a. ¿Cuál de los dos métodos eligiría y porqué?.