

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO

Práctica N°5: Interpolación

1. Para cada uno de los conjuntos de datos dados, calcular el polinomio $p(x)$ interpolador de grado menor o igual que 3, en la forma de Lagrange. Verificar utilizando el comando **polyfit** de **Matlab**. Graficar el polinomio interpolador, usando el comando **polyval**.

x	-1	0	2	3
y	-1	3	11	27

x	-1	0	1	2
y	-3	1	1	3

2. Repetir el problema anterior, usando el método de coeficientes indeterminados.
3. (a) Construir las tablas de diferencias divididas para los datos del Ejercicio 1, y emplearlas para construir los polinomios interpoladores.
 (b) Agregar a las tablas de datos del Ejercicio 1 el punto $x = 4, y = 1$. Aumentar las tablas de diferencias divididas y calcular los polinomios interpoladores.
4. Considerar la función $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$ en el intervalo $[-1,1]$. Graficar f junto con los polinomios que resultan de interpolar a f en los $n + 1$ puntos equiespaciados $x_0 = -1, \dots, x_i = x_0 + \frac{2i}{n}, \dots, x_n = 1$; para $n = 5, 10, 15$.
5. Repetir el Ejercicio 4 para la función $f_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = |x|$ y para la función $f_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = \sin(\pi x)$.
6. Encontrar una función del tipo $2^{ax^3+bx^2+cx+d}$ que interpole la siguiente tabla de datos:

x	-1	0	1	2
y	1	1	0.5	4

7. Utilizando **Matlab**, encontrar y graficar una función del tipo $e^{a_4x^4+a_3x^3+\dots+a_0}$ que interpole a la función $f(x) = 1/x$ en 5 nodos equiespaciados en el intervalo $[1, 10]$.
8. Sea $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x$. Sea P_n un polinomio de grado n que interpola a f en $n + 1$ puntos distintos cualesquiera de dicho intervalo. Demostrar que para todo $x \in [0, 5]$,

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{32 \cdot 5^{n+1}}{(n + 1)!}$$

9. Sea f una función C^∞ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in [a, b]$ se tiene:

$$|f^k(x)| \leq C^k k!$$

Mostrar que, si $0 < C < \frac{1}{b-a}$ y P_n es un polinomio de grado n que interpola a f en $n+1$ puntos distintos, entonces P_n converge a f uniformemente, es decir, $\|f - P_n\|_\infty \rightarrow 0$ cuando n tiende a ∞ .

10. Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{a+x}$. Sean $(x_n)_{n \geq 0}$ una sucesión arbitraria de puntos en $[-1, 1]$ y $P_n(x)$ el polinomio que interpola a $f(x)$ en x_0, x_1, \dots, x_n . Demostrar que si $a > 3$ entonces P_n converge a f uniformemente.

11. (a) Dado el intervalo $[a, b]$, sea m el punto medio entre a y b y sea $h \leq (b-a)/2$. Sea $p = m - h$ y $q = m + h$. Demostrar que para todo x en $[a, b]$,

$$|(x-p)(x-q)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

(b) Sean $x_0 = a, \dots, x_i = x_0 + \frac{b-a}{n}, \dots, x_n = b$, $n+1$ puntos equiespaciados en el intervalo $[a, b]$. Demostrar que para todo x en $[a, b]$,

$$|(x-x_0) \dots (x-x_n)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

12. Sea $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$. Sea P_n un polinomio de grado n que interpola a f en $n+1$ puntos equiespaciados en dicho intervalo.

(a) Demostrar que para todo $x \in [-\pi, \pi]$

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$$

(b) Concluir que P_n converge uniformemente a f .

13. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\pi x) + e^x$. Sea P_n el polinomio de grado n que interpola a f en $n+1$ puntos equiespaciados.

(a) Usando el ejercicio 11, acotar el error $\|f - P_n\|_\infty$.

(b) Sea C_n la cota hallada en (a). Para $n = 1, 3, 5$, graficar simultáneamente f , $f + C_n$, $f - C_n$ y P_n .

14. Sea $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Se interpola a f en los nodos $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, con una función del tipo $g(x) = e^{ax^2+bx+c}$ demostrar que para todo $x \in [0, 1]$ se verifican las desigualdades:

$$e^{-\frac{1}{24}} \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq e^{\frac{1}{24}}.$$

15. Dado un intervalo $[a, b]$, decidir como tienen que estar distribuidos $n+1$ nodos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ en el intervalo de modo que exista $x \in [a, b]$ tal que

$$|(x-x_0) \dots (x-x_n)| \sim (b-a)^{n+1}.$$

16. Hallar n de modo que el polinomio P_n que interpola a la función $f(x) = e^{2x}$ en los ceros de T_{n+1} verifique que $\|f - P_n\|_\infty \leq 10^{-2}$ en $[-1, 1]$.
17. Repetir el ejercicio anterior para $f(x) = e^x$, $x \in [0, 4]$.
18. Para $n = 5, 10, 15$; graficar simultáneamente el polinomio $W_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, donde $x_i = -1 + 2i/n$; $i = 0, \dots, n$ y el polinomio de Tchebychev T_{n+1} .
19. Repetir los Ejercicios 4 y 5 usando los polinomios que interpolan a la función f en los ceros del polinomio de Tchebychev de grado $n + 1$, para $n = 5, 10, 15$.
20. Utilizar el método de coeficientes indeterminados para hallar un polinomio p de grado 2 que satisfaga:

$$p(1) = 0, \quad p'(1) = 7, \quad p(2) = 10.$$

21. Para ilustrar qué pasa cuando se desea interpolar no sólo una función sino también sus derivadas, consideramos el problema de hallar p de grado a lo sumo 3 que verifique:
 - (a) $p(0) = 1, \quad p'(0) = 1, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1$;
 - (b) $p(-1) = 1, \quad p'(-1) = 1, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1$;
 - (c) $p(-1) = 1, \quad p'(-1) = -6, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1$.

Usando el método de coeficientes indeterminados, demostrar que el problema (a) tiene solución única, el problema (b) no tiene solución, y el problema (c) tiene infinitas soluciones.

22. Analizar para qué valores de x_0, x_1, x_2 , y $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ existe un polinomio de grado 2 que satisfice:

$$p(x_0) = \alpha_0, \quad p(x_1) = \alpha_1, \quad p'(x_2) = \alpha_2.$$

y cuándo este polinomio es único.

23. (a) Sea $f(x) = \cos(\pi x)$, hallar un polinomio de grado menor o igual que 3 que verifique

$$p(-1) = f(-1), \quad p(0) = f(0), \quad p(1) = f(1), \quad p'(1) = f'(1).$$

- (b) Hallar un polinomio de grado menor o igual que 4 que verifique las condiciones del ítem anterior, más la condición

$$p''(1) = f''(1).$$

24. Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = e^{2x-1}$ y sean $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ los ceros del polinomio de Tchebychev, T_{n+1} . Se interpola a f con un polinomio P de grado $\leq n + 1$ de modo que $P(x_0) = f(x_0), P(x_1) = f(x_1), \dots, P(x_n) = f(x_n)$ y además $P'(x_n) = f'(x_n)$. Probar que si $n \geq 6$ entonces, el error cometido en la interpolación sobre el intervalo $[-1, 1]$ es menor que 10^{-3} .

25. Sea $f \in C^2[a, b]$, y sean $x_0 = a, x_1 = a + h, \dots, x_n = b$, donde $h = (b - a)/n$. Considerar la poligonal $l(x)$ que interpola a f en los puntos $x_i, i = 0 \dots n$.

(a) Probar que

$$|f(x) - l(x)| \leq \frac{h^2}{2} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

(b) Para los $x \in [a, b]$ tales que l es derivable, probar que

$$|f'(x) - l'(x)| \leq h \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

26. (a) Determinar valores de α, β y γ en \mathbb{R} para que S sea una función spline cúbica, siendo:

$$S(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \gamma x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -\alpha x^3 + \beta x^2 - 5\alpha x + 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

(b) Con los valores de α, β y γ obtenidos en el ítem anterior, decidir si S interpola a la función $f(x) = 2^x + 0.5x^2 - 0.5x - 1, 0 \leq x \leq 2$ respecto de la partición $\{0, 1, 2\}$.

(c) Graficar simultáneamente f y S en el intervalo $[0, 2]$.

27. Sea f como en el Ejercicio 4. Utilizando `Matlab`, graficar la función f junto con una spline cúbica que la interpole en la red $\{-1, -0.75, \dots, 0.75, 1\}$, tomando como condiciones de borde las derivadas de f .

28. **Interpolación en varias variables.**

- Hallar un polinomio de grado 2 en las variables x e y que interpole a la función $f(x, y) = x2^{x-y}$ en los puntos $(-1, 0), (1, 0), (2, 0), (0, 1), (1, 1)$ y $(0, -1)$.
- Decidir si existe un polinomio de grado 2 en las variables x e y que interpole a la función $f(x, y) = x2^{x-y}$ en los puntos $(-1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (0, 1)$ y $(1, 1)$.