Ecuación de Burgers

Elementos de Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre de 2006

Considerar la ecuación en derivadas parciales de primer orden:

$$u_t + uu_x = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

con dato inicial

$$u(x, 0) = u_0(x) \geq 0$$

y condiciones de contorno:

$$u(-\infty, t) = u_0(-\infty)$$

1. Utilizar como dato inicial $u_0(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

Resolver utilizando el método explícito de primer orden en t :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t u_i^n \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \right)$$

Piense cómo implementar las condiciones de contorno. ¿Necesita una condición de contorno a la derecha? Utilice $\Delta x = 0.1$. Pruebe con valores de $\Delta t = 0.2$, y $\Delta t = 0.05$. Qué observa?

2. Repetir el análisis para $u_0(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

3. Para el problema del item 2 utilizar el esquema explícito con "up-wind":

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t u_i^n \left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \right)$$

Utilizar $\Delta x = 0.1$, y $\Delta t = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, y $\Delta t = 0.001$ Analizar los resultados.

En todos los casos, dibujar los perfiles $u(\cdot, t)$ obtenidos a varios tiempos diferentes, y compararlos. Analizar la influencia del dato de contorno, y de qué depende la aparición de un shock. Puede usar el comando `movie` para generar una película de la evolución de la dinámica.