Oscilaciones de una membrana cuadrada - Método de discretización espacio temporal

Elementos de Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre de 2006

El problema de la oscilación de una membrana cuadrada fija por sus bordes, puede ser descripto, al menos para pequeñas elongaciones, por la ecuación de ondas con condición de contorno:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u & (x,y) \in \Omega = [0,1] \times [0,1] \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u_t\,(0,x,y) = g(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

Aquí el operador $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Los datos iniciales adecuados son por ejemplo la posición inicial de la membrana, y su velocidad inicial

$$\begin{cases} u\,(0,x,y) = u_0\,(x,y) & (x,y) \in \Omega = [0,1] \times [0,1] \\ u_t\,(0,x,y) = g(x,y) \end{cases}$$

Sin pérdida de generalidad supondremos que $c = 1$. Los datos iniciales adecuados son por ejemplo la posición inicial de la membrana, y su velocidad.

Introduzca una discretización del dominio $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ con una malla $(x_i, y_j) = (i/N, j/N)$, $0 \leq i, j \leq N$ (siendo $h = \frac{1}{N}$). En el tiempo también introduzca un paso temporal Δt de modo que $t_k = k\Delta t$. Siendo las incógnitas $u^n_{i,j} = u(x_i, y_j, t_n)$, de la ecuación (1) se obtiene el siguiente esquema numérico

$$u^{n+1}_{i,j} + u^{n-1}_{i,j} - 2u^n_{i,j} = \frac{\Delta t^2}{h^2}\left[u^n_{i+1,j} + u^n_{i-1,j} + u^n_{i,j+1} + u^n_{i,j-1} - 4u^n_{i,j}\right] \tag{2}$$

Por lo tanto, suponiendo conocidos la posición de la membrana en el tiempo $t = 0$ y en el tiempo $-dt$, se puede calcular la posición para cualquier t_k posterior. La solución en el tiempo $t = 0$ es el dato inicial $u_0(x,y)$. La condición inicial en la derivada respecto del tiempo le permite plantear una ecuación adicional

$$\frac{u^1_{i,j} - u^{-1}_{i,j}}{2\Delta t} = g(x_i, y_i)$$

de la cual despejar el valor de $u^{-1}_{i,j}$. Reemplazando este valor en la ecuación 2, para $n = 0$, se obtiene el valor de u_1.

Ejercicios

Ejercicio 1: Escriba un programa que resuelva el problema de la membrana, con dato de contorno 0, y para datos iniciales cualesquiera. Grafique las soluciones para algunos casos que le interesen.

Ejercicio 2: Calcule la solución a tiempo 1 correspondiente a una membrana con posición inicial

$$u_0(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y) \qquad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

y velocidad inicial cero. Comparando con la solución exacta $u(t, x, y) = \sin(\sqrt{2}\pi t)\sin(\pi x)\sin(\pi y)$, grafique los errores en función de h, dt. ¿Cuál es el orden de convergencia del método?

Ejercicio 3: Introduciendo una discretización en el tiempo obtenga una animación usando el comando *movie* de Matlab (ver también el comando *getframe*).