Elementos de Cálculo Numérico

Práctica N°8: Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias
Versión reducida

1. Utilizar el método de Euler para resolver $\begin{cases} y' = 2y & \text{en } [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$

   empleando pasos $h = 0.1$, $h = 0.05$ y $h = 0.01$. Graficar las tres soluciones numéricas obtenidas junto con la solución exacta.

2. Considerar el problema $\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$.

   (a) Probar que el método de Euler con paso h genera la sucesión:
   $$y_i = (1 + \lambda h)^i y_0 \quad i = 0, 1, \ldots.$$

   (b) Mostrar que si $\lambda < 0$, la solución exacta tiende a cero a medida que x crece.

   (c) Para $\lambda < 0$, determinar para qué valores de h ocurre que $y_i \to 0$ cuando $i \to \infty$.

3. Se considera la siguiente ecuación diferencial:
   $$\begin{cases} y'(t) = & 2y(t) - 5\sin(t) \\ y(0) = & 1 \end{cases}$$
   cuya solución exacta es la función $y(t) = 2\sin(t) + \cos(t)$. Graficar simultáneamente en el intervalo $[0, 4]$ la solución exacta y las que se obtienen con los métodos de Euler y Taylor de orden 2, ambos con paso $h = 0.05$.

4. Escriba un programa que resuelva la ecuación diferencial del Ejercicio 3 por algún método de Runge-Kutta de orden 2 y de orden 4. Agregar estas soluciones al gráfico realizado en dicho ejercicio.

5. Se quiere estimar, aplicando el método de Euler, el valor de e como $y(1)$ donde $y(t)$ es solución de $y' = y$, $y(0) = 1$. Hallar un paso h de modo que el error cometido resulte menor que 10^{-3}. Realizar el mismo trabajo para el método de Taylor de orden 2.

6. Considerar el problema $y' = -2ty$, $y(0) = 1$, con $t \geq 0$.

   (a) Determinar una cota, en términos de h, para el error cometido si se usa el método de Euler para calcular $y(1)$.

   (b) ¿Cómo debería tomar h si se desea que el error cometido sea menor que 10^{-2}?

   (c) Calcular la solución en $t = 1$ usando el valor de h obtenido en el item previo, y verificar las estimaciones previstas comparando con la solución exacta.

7. Repetir los items (a) y (b) del ejercicio anterior para el problema:
   $$\begin{cases} y'(t) = & t\sin^2(y(t)) \\ y(0) = & 1 \end{cases}$$