

Un sistema autónomo de segundo orden

Elementos de Cálculo Numérico - Segundo Cuatrimestre de 2006

Consideremos el problema de un planeador en el plano vertical xz , suponiendo que la fuerza de resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad de vuelo, y que el ángulo de ataque del planeador es independiente del régimen de vuelo. Con estas suposiciones, los coeficientes aerodinámicos de la fuerza de resistencia del aire C_1 y de la fuerza de sustentación de las alas del planeador C_2 son constantes. Escribiendo las ecuaciones de movimiento del centro de masa del planeador, proyectando sobre la tangente y la normal a la trayectoria, se tiene:

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -mg \sin(\theta) - \frac{1}{2} \rho S C_1 v^2 \\ mv \frac{d\theta}{dt} &= -mg \cos(\theta) + \frac{1}{2} \rho S C_2 v^2 \end{aligned} \tag{1}$$

donde m es la masa del planeador, S la superficie de las alas, ρ es la densidad del aire, g la aceleración de la gravedad, y donde las incógnitas son v el módulo de la velocidad, y θ el ángulo que forma la tangente a la trayectoria con el eje de las x .

Introduciendo las magnitudes adimensionales (verificar)

$$y = v \sqrt{\frac{\rho S C_2}{2mg}} \quad \tau = t \sqrt{\frac{\rho g S C_2}{2m}} \quad a = \frac{C_1}{C_2}$$

se pueden reescribir las ecuaciones (1) en la forma

$$\dot{y} = -\sin(\theta) - ay^2 \quad \dot{\theta} = \frac{y^2 - \cos(\theta)}{y} \tag{2}$$

Notar que las trayectorias sólo dependen del parámetro positivo a . Considere sólo la región $y \geq 0$ (correspondiente al planeador avanzando para adelante).

i) Suponga $a = 0$ (no hay rozamiento). Halle numéricamente las trayectorias del sistema en la superficie del cilindro. Identifique puntos de equilibrio, y confírmelos analíticamente. Si puede hallar analíticamente las trayectorias, hágalo. Identifique cada uno de los diferentes regímenes de vuelo.

ii) Suponga ahora $a > 0$. Realice numéricamente un mapa de las trayectorias del sistema en la superficie del cilindro, para varios valores de a , e identifique nuevos puntos de equilibrio. Halle analíticamente la posición de dichos puntos de equilibrio. Describa las trayectorias posibles, ¿El planeador tiende a comportarse de algún modo particular? Identifique las trayectorias estables.