Resolución de la ecuación de Laplace por medio de Monte Carlo

Elementos de Cálculo Numérico - Segundo Cuatrimestre de 2006

Considere la ecuación de Laplace en 2-D:

$$\triangle u = 0, \qquad x \in \Omega$$

con condición de contorno

$$u|_{\partial\Omega} = g(x)$$

Esta ecuación modela por ejemplo el potencial eléctrico dentro de un dominio Ω cuyo contorno se encuentra a potencial $g(x)$, o el estado estacionario de la temperatura en el dominio Ω cuando el borde se mantiene a temperatura $g(x)$.

El algoritmo de Monte Carlo consiste en lo siguiente. A partir de la discretización por diferencias finitas de la ecuación de Laplace, sobre una malla suficientemente fina, obtener probabilidades de transición entre los nodos. Para conocer el valor de la solución en un nodo de la malla, se larga una partícula desde ese nodo y se la hace evolucionar de acuerdo a las probabilidades de transición calculadas, hasta que choca con el borde, almacenándose el valor del dato de contorno en ese punto. Se repite este procedimiento con una cantidad M de partículas, y se estima el valor de la solución como el promedio de esos valores.

En lo siguiente se propone calcular la solución del Laplaciano en algún dominio del plano. En particular, hallar la solución en la corona circular $\Omega = 1 \leq r \leq 3,\ 0 \leq \theta < 2\pi$ de la ecuación de Laplace con dato de contorno $u(r=1,\theta) = 4$, $u(r=3,\theta) = 6$.

i) Defina una malla rectangular, por ejemplo $x_i = -3 + 6i/N$, $y_i = -3 + 6i/N$, con N un valor adecuado (podría comenzar con $N \sim 10$, por ejemplo).

ii) La discretización habitual del laplaciano conduce a la siguiente ecuación:

$$\triangle u \sim \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2} = 0$$

lo que da las siguientes probabilidades de transición: *una partícula en el nodo i, j tiene probabilidad $1/4$ de pasar a cualquiera de los cuatro nodos adyacentes.*

iii) Utilice estas probabilidades de transición y el procedimiento descripto anteriormente para calcular la solución en el punto $(x, y) = (2, 0)$. Compare con la solución exacta $4 + 2\log(2)/\log(3)$. Repita este cálculo para varios valores de N, y para varios números diferentes de partículas (valores de $M \sim 1000$ o mayores, podrían ser adecuados). Haga gráficos del error en función de N y de M. Si lo desea, experimente con algún otro dominio, donde no sea fácil calcular la solución analítica.