

Oscilaciones de una membrana cuadrada

Elementos de Cálculo Numérico - Segundo Cuatrimestre de 2006

El problema de la oscilación de una membrana cuadrada fija por sus bordes, puede ser descripto, al menos para pequeñas elongaciones, por la ecuación de ondas:

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \quad (x, y) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1]$$

con condición de contorno:

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

Los datos iniciales adecuados son por ejemplo la posición inicial de la membrana, y su velocidad.

i) Discretice el dominio con una malla $(x_i, y_j) = (i/N, j/N)$, $0 \leq i, j \leq N$, y el tiempo $t_k = kdt$. Siendo las incógnitas $u_{i,j}^n = u(x_i, y_j, t_n)$, los valores de la función en los nodos de la malla, la ecuación puede discretizarse

$$u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j}^{n-1} - 2u_{i,j}^n = \frac{c^2 dt^2}{h^2} [u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n - 2 + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n - 4u_{i,j}^n] \quad (1)$$

donde $h = 1/N$. Por lo tanto, suponiendo conocidos la posición de la membrana en a tiempo 0 y a tiempo $-dt$, se puede calcular la posición para cualquier t_k posterior. La solución a tiempo cero se conoce por el dato inicial. La condición inicial en la derivada respecto del tiempo le permite plantear una ecuación adicional

$$u_{i,j}^1 - u_{i,j}^{-1} = 2dt \frac{du}{dt}(x_i, y_i, t_0)$$

de la cual despejar el valor de $u_{i,j}^{-1}$. Reemplazando este valor en la ecuación 1, para $n = 0$, se obtiene el valor de u_1 .

ii) Escriba un programa que resuelva el problema de la membrana, con dato de contorno 0, y para datos iniciales cualesquiera. Grafique las soluciones para algunos casos que le interesen.

iii) Calcule la solución a tiempo 1 correspondiente a una membrana con posición inicial

$$u_0(x, t) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

y velocidad inicial cero. Comparando con la solución exacta $u(x, y, t) = \sin(\sqrt{2}\pi ct) \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, grafique los errores en función de h , dt . ¿Cuál es el orden de convergencia del método?

iv) Si se anima, calcule las autofunciones del problema (esto le va a dar los modos normales de oscilación). Hasta podría hacer una animación, para ver la oscilación en el tiempo.... ¡Consulte!