Ecuación de Burgers

Elementos de Cálculo Numérico - Segundo Cuatrimestre de 2006

Considerar la ecuación en derivadas parciales de primer orden:

$$u_t + uu_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

con dato inicial

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0$$

y condiciones de contorno:

$$u(-\infty, t) = u_0(-\infty)$$

i) Utilizar como dato inicial $u_0(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.
Resolver utilizando el método explícito de primer orden en t:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \triangle t\ u_i^n \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\triangle x} \right)$$

Piense cómo implementar las condiciones de contorno. ¿Necesita una condición de contorno a la derecha? Utilice $\triangle x = 0.1$. Pruebe con valores de $\triangle t = 0.2$, y $\triangle t = 0.05$. ¿Qué observa?

ii) Repetir el análisis para $u_0(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

iii) Para el problema del ítem ii) utilizar el esquema explícito con "up-wind":

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \triangle t u_i^n \left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\triangle x} \right)$$

Utilizar $\triangle x = 0.1$, y $\triangle t = 0.1$, $\triangle t = 0.01$, y $\triangle t = 0.001$ Analizar los resultados.

En todos los casos, dibujar los perfiles $u(\cdot, t)$ obtenidos a varios tiempos diferentes, y compararlos. Analizar la influencia del dato de contorno, y de qué depende la aparición de un shock.