

# Problema de Oscilaciones no Lineales

## Ecuación de Duffing

Elementos de Cálculo Numérico - Segundo Cuatrimestre de 2006

Se llama ecuación de Duffing sin rozamiento a la ecuación diferencial:

$$x'' + ax + bx^3 = F \cos(\omega t) \quad (1)$$

que refleja las oscilaciones de un resorte no lineal, sometido a la acción de una fuerza periódica de frecuencia  $\omega$  e intensidad  $F$ .

i) Verificar que la ecuación dada corresponde a la situación física descrita. Interpretar físicamente el significado del signo de  $b$ . ¿Cuál es el signo de  $a$ ?

ii) Escribir la ecuación 1 en la forma de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

iii) Escribir un programa que integre el sistema del punto anterior, para cada conjunto de valores  $a$ ,  $b$ ,  $\omega$ ,  $F$ . Utilizar para ello la rutina RKF45, o bien hacerlo con MATLAB o MATHEMATICA.

iv) Resolver analíticamente el correspondiente problema lineal (obtenido haciendo  $b = 0$ ). Observe que si  $\omega$  es distinta de la frecuencia propia del oscilador, la solución tiene dos términos. Uno de ellos tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , mientras que el otro es una función periódica de período  $\omega$ . Es decir, la solución incluye un transitorio, que depende del dato inicial, pero tiende cuando  $t \rightarrow \infty$  a una solución periódica forzada por la acción externa. Es decir, la solución asintótica es

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

Verificar que si la frecuencia propia del oscilador tiende a  $\omega$ , el coeficiente  $A$  tiende a infinito. Esta situación se dice *resonancia*.

Dibujar para cada  $F$  gráficos de la amplitud de la oscilación en función de la frecuencia de la fuerza externa  $\omega$ .

v) Considerar ahora el problema no lineal 1. Tratar de obtener la misma información, y analizar qué ocurre en resonancia. Dibujar curvas de la amplitud de oscilación en función de  $\omega$  para valores fijos de  $F$ . Interprete los resultados. Ojo!!!!!!

vi) Esta situación puede ser tratada analíticamente. Ver por ejemplo la *Mecánica* de Landau y Lifchitz, o el libro *Ecuaciones Diferenciales ordinarias* de Roxin y Spinadel. Repita las cuentas allí realizadas para hallar las soluciones periódicas del problema, y trate de obtener numéricamente los mismos resultados.