

Ecuaciones en Derivadas Parciales

Método de líneas

Elementos de Cálculo Numérico - Segundo Cuatrimestre de 2006

Considerar la ecuación en derivadas parciales:

$$u_t = u_{xx} \quad (1)$$

llamada ecuación del calor, para $x \in [0, 1]$, con condiciones de contorno

$$u(0, t) = 0 \quad u(1, t) = 0 \quad (2)$$

y dato inicial

$$u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad (3)$$

Esta ecuación refleja la evolución de la temperatura en una barra que ocupa el segmento $[0, 1]$, sin pérdidas laterales de calor, y con una temperatura inicial dada por 3. Además los extremos se mantienen a temperatura igual a cero para todo t . El problema con este tipo de condiciones de contorno se denomina problema de Dirichlet. Si en vez de 2 se tienen datos sobre las derivadas:

$$u_x(0, t) = 0 \quad u_x(1, t) = 0 \quad (4)$$

se tiene el llamado problema de Neumann.

i) Para el problema de Dirichlet, convierta el problema con la ecuación en derivadas parciales en un problema para un sistema de ecuaciones ordinarias, de la siguiente manera:

Defina una grilla $0 = x_0 < \dots < x_n = 1$, y defina las funciones incógnita $\phi_i(t)$, $i = 0, \dots, n$, como los valores de la solución $\phi_i(t) = u(x_i, t)$. Verifique discretizando la ecuación 1 que se obtiene un sistema de ecuaciones ordinarias para las ϕ_i , $0 < i < n$. Las condiciones 2 ó 4 pueden ser usadas para generar ecuaciones para ϕ_0 y ϕ_n respectivamente.

ii) Utilice esta técnica para resolver el problema 1, con dato inicial $u(x, 0) = \sin(\pi x)$, y condiciones de contorno 2. Obtenga la solución exacta de este problema, y compare los valores obtenidos para $t = 1$. Analice cómo dependen los errores del paso de la discretización h .

iii) Realice el mismo análisis con la misma ecuación y el mismo dato inicial, pero condiciones de contorno $u(0, t) = 1 = u(1, t)$. ¿Qué ocurre?

iv) Sugiera una manera de implementar las condiciones de contorno 4, resuelva el problema 1, 4, $u(x, 0) = \cos(\pi t)$, numérica y analíticamente, y analice cómo depende el error de la discretización. ¿Qué pasa? ¿Se le ocurre cómo mejorar las cosas?.