Resolución de problemas de contorno
Formación de capas límite

Elementos de Cálculo Numérico - Segundo Cuatrimestre de 2006

Considerar el siguiente problema de contorno:

$$\epsilon u'' = u' \quad u(0) = 0 \qquad u(1) = 1 \quad (\epsilon > 0)$$

i) Hallar su solución analítica, y graficarla para varios valores de ϵ. Por ejemplo, utilice $\epsilon = 1.,\ 0.1,\ 0.01$. ¿Qué observa? Esta formación de una delgada zona donde la solución varía en forma brusca se denomina una capa límite (debido a que el problema de hallar el movimiento de un fluido poco viscoso cerca de un obstáculo lleva a un problema en algún sentido similar).

ii) Resuelva el problema de contorno por el método de diferencias finitas, para varios valores de ϵ (los anteriore, por ejemplo), y note las fuertes oscilaciones que aparecen discretizando las derivadas en la forma habitual, si la malla de la discretización no es suficientemente fina.

iii) Escriba y resuelva analíticamente la recurrencia que obtiene al aplicar el método de diferencias finitas, y halle la causa de las oscilaciones que se manifiestan. Diga qué rango de valores de h debieran utilizarse de modo de evitar las oscilaciones.

iv) Resolver el problema mediante un método de shooting, con algún método de integración que utilice un paso de integración h fijo. Grafique el error máximo de la solución en función de h. Interprete. Notar de todos modos que la linealidad de la ecuación permite lograr que la estimación de la derivada correcta en el origen pueda ser lograda luego de una sola integración. ¿Se imagina cómo?

v) Trate de extender sus conclusiones al caso del problema de contorno no lineal

$$\epsilon u'' = u'u \quad u(0) = 0 \qquad u(1) = 1 \quad (\epsilon > 0)$$

¿Qué clase de problema resulta si quiere plantearlo por diferencias finitas?

Trate de resolver analíticamente el problema, y resuélvalo por el método de correción de tiro.

Ambos problemas son interesantes, pues se obtienen como soluciones estacionarias del problema de convección difusión

$$u_t + c\frac{\partial u}{\partial x} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

con $0 \leq x \leq 1$, $0 < t$. *Reemplazando la constante* c *por* u, *se obtiene un caso particular de la ecuación de Navier-Stokes, que gobierna el comportamiento de un fluido incompresible.*