Cálculo de Integrales por medio del método de Monte Carlo

Elementos de Cálculo Numérico - Segundo Cuatrimestre de 2006

Las técnicas basadas en el Método de Monte Carlo, emplean números aleatorios (o seudo-aleatorios) para resolver una variada gama de problemas. En lo que sigue se propone el estudio de algunas aplicaciones al cálculo de integrales. El software para computadoras provee normalmente rutinas que proporcionan secuencias de números aleatorios distribuidos uniformemente en el $[0,1]$. En Matlab, las sentencias *rand*, *rand(m,n)*, producen un número aleatorio o una matriz de mxn de números aleatorios con distribución uniforme en el $[0,1]$, respectivamente.

i) Sean $x_1, \ldots, \ x_n$ una sucesión de números aleatorios con distribución uniforme en el $[0,1]$. Verifique que una aproximación a la integral de una función f se puede obtener mediante:

$$\int_0^1 f(x)dx \sim \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Utilice esta aproximación para varios n, en casos en que conozca la integral, y obtenga expresiones para el error en función de n.

ii) La extensión de estas ideas a m dimensiones es trivial:

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x^1, \ldots, x^m) \sim \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^1, \ldots, x_i^m)$$

donde $(x_i^1, \ldots, x_i^m),\ i = 1 \ldots n$ es una sucesión de m-uplas de elementos aleatorios con distribución uniforme en el $[0,1]$. Use esta aproximación para calcular integrales en varias dimensiones, compare en algunos casos con las soluciones exactas, y grafique el error en función de n. Aplique esta técnica al cálculo de volúmenes en varias dimensiones.

iii) Compare, para obtener errores del mismo orden, el costo del método de Monte Carlo, con el costo de un método más tradicional (Simpson, o trapecios). En particular, es interesante analizar esto en función de la dimensión del espacio. Por ejemplo, intente aproximar el volumen de la bola unitaria en $\mathbb{R}^m$, mediante el método de Monte Carlo, y calculando integrales iteradas por el método que prefiera (¿conoce la respuesta exacta a este problema?).

iv) Un último ejemplo, no relacionado con integrales. Es el llamado problema de la aguja de Buffon. Suponga que tiene una hoja rayada, y una aguja de longitud igual a la distancia entre las rayas. Estime numéricamente la probabilidad de que la aguja, al ser arrojada al azar sobre la hoja rayada, intersecte alguna de las rayas. Si se anima, demuestre que dicha probabilidad es $2/\pi$. Grafique el error en función del número de tiradas.