

Consistencia, Estabilidad y Convergencia

1. Métodos a un paso

Para aproximar la solución $x = x(t)$ del problema de valores iniciales (PVI)

$$\begin{aligned}x' &= f(t, x) & a \leq t \leq b \\x(a) &= \alpha\end{aligned}$$

consideramos el método numérico a un paso (M)

$$\begin{aligned}x_0 &= \alpha \\x_{k+1} &= x_k + h\phi(t_k, x_k, h) & k = 0, \dots, N-1,\end{aligned}$$

donde $t_k = a + kh$, $k = 0, \dots, N$ con $h = (b - a)/N$. Esperamos que x_k aproxime a $x(t_k)$. La función ϕ identifica el método a un paso (M).

Definición de convergencia. Decimos que (M) es convergente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq n \leq N} |x(t_n) - x_n| = 0$$

cualquiera sea la condición inicial $x(0) = \alpha$. Notar que N (y los t_n) depende de h .

Definición de estabilidad. (M) se dice estable si existen constantes M_1 y M_2 independientes de h (y entonces de N) tales que para cualquier par de sucesiones $\{x_n\}_{n=0}^N$ y $\{y_n\}_{n=0}^N$ definidas por

$$\begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ x_{n+1} = x_n + h\phi(t_n, x_n, h) \end{cases} \quad \begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_{n+1} = y_n + h[\phi(t_n, y_n, h) + \varepsilon_n] \end{cases}$$

se tiene

$$\max_{0 \leq n \leq N} |x_n - y_n| \leq M_1|x_0 - y_0| + M_2 \max_{0 \leq n \leq N-1} |\varepsilon_n|. \quad (1.1)$$

Esta noción de estabilidad significa que una pequeña perturbación en los datos (condición inicial y ϕ) no implica más que una pequeña perturbación en la solución, independientemente del paso h . Hay que tener en cuenta que siempre se introducen perturbaciones debido a los errores de redondeo. Entonces esta propiedad es indispensable para un método numérico.

Definición de error de truncamiento local. El error de truncamiento local en el paso n -simo, $n = 0, \dots, N-1$, es el número τ_n dado por

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h\phi(t_n, x(t_n), h) + h\tau_n.$$

Esta definición depende de la solución del problema (PVI).

Definición de consistencia. El método (M) se dice consistente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq n \leq N-1} |\tau_n| = 0$$

para toda solución x suficientemente regular de $x' = f(t, x)$.

Theorem 1.1 *Si el método a un paso (M) es consistente y estable entonces es convergente.*

Demostración. Hecha en clase. \square

Proposition 1.2 *Supongamos que ϕ es Lipschitz respecto de la segunda variable, o sea, existe M tal que $\forall t \in [a, b], \forall x, \bar{x} \in \mathbb{R}$, y $\forall h$ suficientemente pequeño, se tiene*

$$|\phi(t, x, h) - \phi(t, \bar{x}, h)| \leq M|x - \bar{x}|.$$

Entonces el método (M) es estable.

Demostración. Sean $\{x_n\}_{n=0}^N$ e $\{y_n\}_{n=0}^N$ dos sucesiones como en la definición de estabilidad. Entonces para $0 \leq n \leq N - 1$ tenemos usando la lipschitzianidad de ϕ

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - y_{n+1}| &\leq |x_n - y_n| + h|\phi(t_n, x_n, h) - \phi(t_n, y_n, h)| + h|\varepsilon_n| \\ &\leq |x_n - y_n| + hM|x_n - y_n| + h|\varepsilon_n| \\ &= (1 + hM)|x_n - y_n| + h|\varepsilon_n|. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Vamos a probar por inducción que

$$|x_{n+1} - y_{n+1}| \leq (1 + hM)^{n+1}|x_0 - y_0| + \frac{(1 + hM)^{n+1} - 1}{M} \max_{0 \leq k \leq n} |\varepsilon_k|.$$

Para $n = 0$ es cierto (poner $n = 0$ en (1.2)). Supongamos que vale para $n - 1$ y queremos demostrarla para n . Estamos suponiendo que

$$|x_n - y_n| \leq (1 + hM)^n|x_0 - y_0| + \frac{(1 + hM)^n - 1}{M} \max_{0 \leq k \leq n-1} |\varepsilon_k|. \tag{1.3}$$

Insertando (1.3) en (1.2) tenemos

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - y_{n+1}| &\leq (1 + hM)|x_n - y_n| + h|\varepsilon_n| \\ &\leq (1 + hM) \left[(1 + hM)^n|x_0 - y_0| + \frac{(1 + hM)^n - 1}{M} \max_{0 \leq k \leq n-1} |\varepsilon_k| \right] + h|\varepsilon_n| \\ &\leq (1 + hM)^{n+1}|x_0 - y_0| + \left[(1 + hM) \frac{(1 + hM)^n - 1}{M} + h \right] \max_{0 \leq k \leq n} |\varepsilon_k| \\ &= (1 + hM)^{n+1}|x_0 - y_0| + \frac{(1 + hM)^{n+1} - 1}{M} \max_{0 \leq k \leq n} |\varepsilon_k|, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. Cambiando ligeramente la notación, hemos probado que para $n = 0, \dots, N$ vale

$$|x_n - y_n| \leq (1 + hM)^n |x_0 - y_0| + \frac{(1 + hM)^n - 1}{M} \max_{0 \leq k \leq n-1} |\varepsilon_k|$$

(el caso $n = 0$ hay que considerarlo aparte, pero es trivial).

Usando que para $s > 0$ vale $1 + s \leq e^s$ tenemos

$$\begin{aligned} |x_n - y_n| &\leq e^{nhM} |x_0 - y_0| + \frac{e^{nhM} - 1}{M} \max_{0 \leq k \leq n-1} |\varepsilon_k| \\ &= e^{(t_n - a)M} |x_0 - y_0| + \frac{e^{(t_n - a)M} - 1}{M} \max_{0 \leq k \leq n-1} |\varepsilon_k| \end{aligned}$$

donde usamos que $nh = t_n - a$. Finalmente como $t_n - a \leq b - a$ y $\max_{0 \leq k \leq n-1} |\varepsilon_k| \leq \max_{0 \leq k \leq N-1} |\varepsilon_k|$ resulta

$$|x_n - y_n| \leq e^{(b-a)M} |x_0 - y_0| + \frac{e^{(b-a)M} - 1}{M} \max_{0 \leq k \leq N-1} |\varepsilon_k|, \quad 0 \leq n \leq N, \quad (1.4)$$

esto es (2.1) con

$$M_1 = e^{(b-a)M} \quad \text{y} \quad M_2 = \frac{e^{(b-a)M} - 1}{M}. \quad \square$$

Corollary 1.3 (de la demostración) *Sea x la solución de (PVI) y $\{x_n\}_{n=0}^N$ la sucesión generada por (M). Supongamos que ϕ es Lipschitz respecto de la segunda variable, con constante de Lipschitz M . Entonces tenemos la siguiente estimación del error global*

$$\max_{0 \leq n \leq N} |x(t_n) - x_n| \leq \frac{e^{(b-a)M} - 1}{M} \max_{0 \leq k \leq N-1} |\tau_k|$$

donde, para cada k , τ_k es el error de truncamiento local en el paso k .

Estamos suponiendo que no cometemos errores en la condición inicial, o sea, $x_0 = \alpha$.

Demostración. En la demo de la proposición anterior, pongamos $\{x_n\}$ la sucesión generada por (M), e $\{y_n\}$ la sucesión dada por $y_n = x(t_n)$. De la definición de error de truncamiento local tenemos

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h [\phi(t_n, x(t_n), h) + \tau_n],$$

o sea, y_n verifica la misma definición que en la proposición, con $\varepsilon_k = \tau_k$, $k = 0, \dots, N - 1$. Entonces vale (1.4) con $y_n = x(t_n)$ para $n = 0, \dots, N$. Notar que $x(a) = x_0 = \alpha$, luego

$$|x(t_n) - x_n| \leq \frac{e^{(b-a)M} - 1}{M} \max_{0 \leq k \leq N-1} |\tau_k|.$$

Ahora basta tomar máximo en n y notar que el lado derecho no depende de n . \square

Observación. Del Corolario anterior, resulta evidente que si ϕ es Lipschitz respecto de su segunda variable, y (M) es consistente, entonces (M) es convergente. Esto es un caso particular del Teorema 1.1.

Definición de orden de un método. Sea $p \geq 0$. (M) se dice de orden $\geq p$ si para toda solución suficientemente regular de (PVI) se tiene

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} |\tau_n| \leq Ch^p \quad (= O(h^p))$$

para alguna constante C (C puede depender de la solución x).

Notar que si un método tiene orden $\geq p$ con $p > 0$, entonces es consistente. Así, si (M) tiene orden $\geq p$ con $p > 0$ y si ϕ es Lipschitz respecto de su segunda variable (entonces (M) es estable), sabemos que (M) es convergente. El siguiente Teorema da idea de la rapidez de la convergencia.

Theorem 1.4 Si ϕ es Lipschitz respecto de su segunda variable y (M) es de orden $\geq p$, entonces

$$\max_{0 \leq n \leq N} |x(t_n) - x_n| \leq Ch^p \quad (= O(h^p)).$$

para alguna constante C (C puede depender de la solución x , y en general es distinta de la constante de la definición de orden).

Demostración. Sigue del Corolario 1.3 anterior y de la definición de orden de un método. \square

Observación. En la constante C del Teorema anterior, intervienen la constante de la definición de orden (que acota los errores de truncamiento local) y la constante del Corolario 1.3 $\frac{e^{(b-a)M}-1}{M}$, donde a su vez aparece la constante de Lipschitz de ϕ . En algunos casos se necesita estimar esta constante C del Teorema, y esto a veces se puede hacer usando sólo los datos del problema (PVI), sin conocer la solución exacta x .

2. Métodos Multipaso

Consideramos el mismo problema de valores iniciales (PVI) que antes. Sea $t_n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$ con $h = (b - a)/N$. Un método multipaso a k (MM) pasos consiste en calcular x_0, x_1, \dots, x_N que verifiquen la siguiente ecuación en diferencias:

$$\alpha_k x_{n+k} + \alpha_{k-1} x_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 x_n = h [\beta_k f_{n+k} + \beta_{k-1} f_{n+k-1} + \dots + \beta_0 f_n]$$

para $n = 0, \dots, N-k$. Se supone que x_0, x_1, \dots, x_{k-1} son conocidos. $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ y $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ son constantes independientes del paso n . Estamos usando la notación

$$f_q = f(t_q, x_q).$$

Suponemos $\alpha_k \neq 0$ y $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$. Si $\beta_k = 0$ el método se dice explícito, sino es implícito.

Definición de convergencia. Decimos que (MM) es convergente si cualquiera sea la condición inicial $x(a) = \alpha$ vale la siguiente propiedad: Si

$$\lim_{h \rightarrow 0} x_i = x(a), \quad i = 0, 1, \dots, k-1,$$

entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq n \leq N} |x(t_n) - x_n| = 0$$

Notar que N (y los t_n) depende de h .

Definición de estabilidad. (MM) se dice estable si existen constantes M_1 y M_2 independientes de h (y entonces de N) tales que para cualquier par de sucesiones $\{x_n\}_{n=0}^N$ y $\{y_n\}_{n=0}^N$ definidas por

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i f(t_{n+i}, x_{n+i}) \quad n = 0, \dots, N - k$$

x_0, x_1, \dots, x_{k-1} dados

y

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h \left[\sum_{i=0}^k \beta_i f(t_{n+i}, y_{n+i}) + \varepsilon_n \right] \quad n = 0, \dots, N - k$$

y_0, y_1, \dots, y_{k-1} dados

se tiene

$$\max_{0 \leq n \leq N} |x_n - y_n| \leq M_1 \max_{0 \leq i \leq k-1} |x_i - y_i| + M_2 \max_{0 \leq n \leq N-k} |\varepsilon_n|. \quad (2.1)$$

Definición de error de truncamiento local. El error de truncamiento local en el paso n -simo, $n = 0, \dots, N - k$, es el número τ_n dado por

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i x(t_{n+i}) = h \sum_{i=0}^k \beta_i f(t_{n+i}, x(t_{n+i})) + h\tau_n. \quad (2.2)$$

siendo x la solución de (PVI). Esta definición depende de la solución del problema (PVI).

Definición de consistencia. El método (MM) se dice consistente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq n \leq N-k} |\tau_n| = 0$$

para toda solución x suficientemente regular de $x' = f(t, x)$.

Theorem 2.1 *Si el método a k pasos (MM) es estable y consistente entonces es convergente.*

Volvemos a la definición de error de truncamiento local. Teniendo en cuenta que $x'(t_{n+i}) = f(t_{n+i}, x(t_{n+i}))$, y que $t_{n+i} = t_n + hi$ de la ecuación (2.2) obtenemos

$$h\tau_n = \sum_{i=0}^k \alpha_i x(t_n + hi) - h \sum_{i=0}^k \beta_i x'(t_n + hi).$$

Dejando n fijo, ponemos $t = t_n$ y entonces escribimos la ecuación anterior sin el subíndice n :

$$h\tau = \sum_{i=0}^k \alpha_i x(t + hi) - h \sum_{i=0}^k \beta_i x'(t + hi).$$

Si x es suficientemente regular podemos escribir $h\tau$ en la forma

$$h\tau = C_0x(t) + C_1hx'(t) + C_2h^2x''(t) + \dots + C_qh^qx^{(q)}(t) + \dots \quad (2.3)$$

Para ver esto escribimos

$$\begin{aligned} x(t+jh) &= x(t) + x'(t)jh + \frac{x''(t)}{2}(jh)^2 + \dots \\ x'(t+jh) &= x'(t) + x''(t)jh + \frac{x'''(t)}{2}(jh)^2 + \dots \end{aligned}$$

Reemplazando en (2.3) e igualando potencias de h encontramos

$$\begin{aligned} C_0 &= \alpha_0 + \dots + \alpha_k, \\ C_1 &= (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k) - (\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_k) \end{aligned}$$

y para $q \geq 2$

$$C_q = \frac{1}{q!}(\alpha_1 + 2^q\alpha_2 + \dots + k^q\alpha_k) - \frac{1}{(q-1)!}(\beta_1 + 2^{q-1}\beta_2 + \dots + k^{q-1}\beta_q).$$

Definición de orden de un método multipaso. Un método multipaso se dice de orden p si $C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0$ y $C_{p+1} \neq 0$.

Proposition 2.2 Si (MM) es de orden p entonces el error de truncamiento local en el paso n -simo verifica

$$\tau_n = C_{p+1}h^p x^{(p+1)}(t_n) + O(h^{p+1}).$$

Corollary 2.3 (MM) es consistente si y sólo si $C_0 = C_1 = 0$, esto es, si y sólo si tiene orden ≥ 1 .

Definimos los polinomios

$$p(z) = \sum_{j=0}^k \alpha_j z^j \quad \text{y} \quad q(z) = \sum_{j=0}^k \beta_j z^j$$

Notemos que

$$C_0 = p(1) \quad \text{y} \quad C_1 = p'(1) - q(1).$$

Luego, (MM) es consistente si y sólo si $p(1) = 0$ y $p'(1) = q(1)$.

Proposition 2.4 (Condición de la raíz) El método (MM) es estable si y sólo si el polinomio p verifica las siguientes 2 condiciones:

- a) Todas sus raíces tienen módulo ≤ 1 .
- b) Las eventuales raíces de módulo 1 son simples.

Theorem 2.5 Si el polinomio p verifica la condición de la raíz y si

$$p(1) = 0 \quad \text{y} \quad p'(1) = q(1)$$

entonces (MM) es convergente.