Simulación de un ecosistema simple

Elementos de Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre de 2007

Considerar un ecosistema simple, que consiste de conejos, que disponen de una cantidad de recursos ilimitada, y de zorros que los depredan para comer. Un modelo clásico de este problema, debido a Volterra, es el siguiente par de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primer orden:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= 2r - \alpha r f & r(0) &= r_0 \\ \frac{df}{dt} &= -f + \alpha r f & f(0) &= f_0\end{aligned}$$

donde t es el tiempo, $r = r(t)$ es el número de conejos, y $f = f(t)$ es el número de zorros. La constante α es positiva. Cuando $\alpha > 0$ los zorros encuentran a los conejos con una probabilidad que es proporcional al producto de sus cantidades. Esto resulta en una disminución del número de conejos, y por razones menos claras, en un aumento en el número de zorros. >Qué, ocurre si $\alpha = 0$?

Investigar el comportamiento de este sistema para $\alpha = .01$, y varios valores de r_0 y f_0 , en el intervalo desde 2 ó 3 hasta varios miles. Graficar las situaciones interesantes, e interpretarlas. Incluir gráficos de r vs. f .

a) Calcular la solución con $r_0 = 300$ y $f_0 = 150$. >Qué observa? >Cuál es aproximadamente el período de la solución?

b) Calcular la solución con $r_0 = 15$, y $f_0 = 22$. >En algún momento la cantidad de conejos se hace menor que 1? >Cómo interpretaría esta situación? Hallar condiciones iniciales para las cuales se extingan los zorros. Hallar condiciones iniciales con $r_0 = f_0$ de modo que ambas especies se extingan.

c) Se han propuesto muchas modificaciones de este sistema simple para reflejar con más precisión lo que ocurre en la naturaleza. Por ejemplo, la modificación

$$\frac{dr}{dt} = 2r \left(1 - \frac{r}{R}\right) - \alpha r f \quad r(0) = r_0$$

impide que el número de conejos pueda hacerse infinito (verifíquelo). Elija un valor razonable de R , y conteste las mismas preguntas que para el sistema inicial. En particular, >qué, ocurre con las soluciones periódicas?