Oscilaciones de una membrana cuadrada - Método de separación de variables

Elementos de Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2007

El problema de la oscilación de una membrana cuadrada fija por sus bordes, puede ser descripto, al menos para pequeñas elongaciones, por la ecuación de ondas con condición de contorno:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u & (x,y) \in \Omega = [0,1] \times [0,1] \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Aquí el operador $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Los datos iniciales adecuados son por ejemplo la posición inicial de la membrana, y su velocidad inicial. Sin pérdida de generalidad supondremos que $c = 1$.

Resolviendo por el método de separación de variables se buscan soluciones de la forma $U(t,x,y) = T(t)\,Z(x,y)$, de modo que

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\Delta Z(x,y)}{Z(x,y)} = \lambda$$

para alguna constante λ. Usando la condición de contorno tenemos que

$$Z|_{\partial\Omega} = 0$$

es decir que λ es un autovalor de la ecuación de Laplace con datos de contorno Dirtchlet homogéneo

$$\begin{cases} \Delta Z - \lambda Z = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \\ Z|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Se sabe que la ecuación (2) tiene una sucesión de autovalores negativos $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ con correspondientes autofunciones $Z_n(x,y)$, y que $\lambda_n \to -\infty$ cuando $n \to +\infty$. La correspondiente función T_n es una solución de la ecuación

$$T''(t) - \lambda_n T(t) = 0$$

Si $\lambda_n = -\omega_n^2$ resulta que $T_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \operatorname{sen}(\omega_n t)$, y de este modo soluciones de (1) de la forma

$$u(t,x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \operatorname{sen}(\omega_n t)\right) Z_n(x,y) \tag{3}$$

donde los valores a_n y b_n se obtienen a partir de las condiciones iniciales.

A los autovalores λ_n se los llama los *modos normales de oscilación.*

Para hallar las soluciones en la forma (3) necesita calcular los autovalores λ_n y las autofunciones Z_n del problema de Laplace

Ejercicios

Introduzca una discretización del dominio $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ con una malla $(x_i, y_j) = (i/N, j/N)$, $0 \leq i, j \leq N$. Llamamos $h = \frac{1}{N}$.

Ejercicio 1: Cálculo de los λ_n y los Z_n.

Discretizamos la ecuación (2) sobre la malla introducida y obtenemos el esquema

$$\frac{z_{i+1,j} - 2z_{i,j} + z_{i-1,j}}{h^2} + \frac{z_{i,j+1} - 2z_{i,j} + z_{i,j-1}}{h^2} = \lambda z_{i,j} \quad i, j = 1, \dots, N-1$$

1. Reescribir esto como un problema lineal $Az = \lambda z$.
2. Aplicando el método de las potencias aproximar el primer autovalor de A y la primera autofunción. Probar con distintos valores de h.
3. Iterar el método de las potencias para hallar $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ y sus correspondientes autofunciones.

Ejercicio 2: Introduzca los autovalores y las autofunciones halladas en el ejercicio anterior en la expresión (3) para resolver el problema con dato inicial

$$u_0\left(x, y\right) = \sin(\pi x)\sin(\pi y) \qquad (x, y) \in [0,1] \times [0,1]$$

y velocidad inicial cero (es decir $u_t(0, x, y) = 0$).

Introduciendo una discretización en el tiempo obtenga una animación usando el comando *movie* de Matlab (ver también el comando *getframe*).