Elementos de Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre de 2007

Práctica N°4: Resolución de ecuaciones no-lineales.

1. Elegir un intervalo apropiado y utilizar el método de bisección para hallar una raíz positiva de la ecuación trascendente:

$$2x = \tan(x)$$

¿Cuántos pasos hay que hacer para garantizar que el error sea menor que 10^{-5}?

2. Hacer un programa en `Matlab` que ejecute los primeros 20 pasos de los métodos de bisección y Regula-Falsi para hallar una raíz de la ecuación $2x^3 + x - 2 = 0$ comenzando con el intervalo $[0, 1]$.

3. Para $f(x) = -2x^3 + 6x - 1$ se desea aproximar la raíz $r \in (0, 1)$ utilizando el método de bisección comenzando con $a_0 = 0$ y $b_0 = 1$. Determinar una cantidad de pasos a seguir para poder asegurar que $|f(a_n)| < 10^{-100}$ y $|f(b_n)| < 10^{-100}$.

4. Hacer un programa en `Matlab` para aproximar $\sqrt[3]{2}$ que ejecute los primeros 20 pasos del método de bisección, comenzando con el intervalo $[1, 2]$, y del método N-R, comenzando con $x_0 = 2$.

5. Considerar la función $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$. Determinar para qué valores de x_0 la iteración N-R es convergente, para cuáles es divergente, y cuándo se obtienen ciclos periódicos.

6. Sea f una función C^1 y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión que se obtiene de aplicar el método N-R a f. Supongamos que x_n converge a r y $f'(r) \neq 0$, mostrar que r es raíz de f.

7. Demostrar que la ecuación

$$f(x) = e^x + 5\sin x - 2 = 0$$

tiene una única raíz r en el intervalo $(0, \frac{3}{2})$. Encontrar un valor inicial en este intervalo de modo que el método N-R converja a r (para ello, calcular cotas necesarias para $|f'|$ y $|f''|$ en el intervalo). Aplicar el método para hallar una aproximación de r. ¿Cuál es el orden de convergencia?

8. La ecuación $x^3 + \cos(x) + 7x = 0$ tiene una única raíz real.

   - Demostrar que el método de Newton-Raphson converge para todo valor inicial en $(-1, 0)$.
   - Demostrar que si $x_0 = -0.5$, el error n-ésimo es menor o igual que $\frac{12}{7}(\frac{7}{24})^{2^n}$.
   - Calcular cuántos pasos del método son necesarios para aproximar la solución con error menor o igual que 10^{-100}.

9. Sea f una función suave, y a tal que $f(a) = 0$, y $f'(a) \neq 0$. Suponiendo que en $(a, b]$, f, f', f'' son positivas, probar que la iteración de N-R generada a partir de $x_0 \in (a, b)$ converge decrecientemente hacia a.

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)e^x - 4$.

    (a) Probar que el método de Newton-Raphson es convergente para todo $x_0 > 1$.

    (b) Analizar la convergencia del método si se toma como valor inicial $x_0 = -3$.

11. Sea $f(x) = x^\alpha$. Se desea utilizar el método N-R para resolver la ecuación $f(x) = 0$, comenzando con $x_0 > 0$. Analizar el comportamiento del método en los casos

    (a) $\alpha \geq 1$ (b) $\alpha = \frac{1}{3}$ (c) $\alpha = \frac{1}{2}$

12. (a) Sea $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_d)$ donde $r_1 < r_2 < \cdots < r_d$. Probar que si $x_0 > r_d$ la sucesión de N-R converge a r_d.

    (b) Para un polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$, $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_0, a_d \neq 0$, tal que sus d raíces son reales y distintas, se propone el siguiente método que aproxima los valores de todas sus raíces:

        i. Se comienza con un valor x_0 mayor que $M = \max\{1, \sum_{i=0}^{d-1} \frac{|a_i|}{|a_d|}\}$ (Dato: M es una cota para el módulo de todas las raíces del polinomio).

        ii. Se genera a partir de x_0 la sucesión de N-R, que, según el ítem anterior, converge a la raíz más grande de P, llamémosla r_d; obteniéndose de este modo un valor aproximado $\tilde{r}_d$.

        iii. Se divide P por $x - \tilde{r}_d$ y se desprecia el resto, dado que $r_d \sim \tilde{r}_d$. Se redefine ahora P como el resultado de esta división y se comienza nuevamente desde el primer ítem, para hallar las otras raíces.

    Aplicar este método para aproximar todas las raíces del polinomio $P(x) = 2x^3 - 4x + 1$.

13. Se quiere aplicar el método N-R para dar una tabla de valores de la función $y(x)$ definida implícitamente por la ecuación $G(x, y) = 0$ en un intervalo $[a, b]$.

    El método consiste en comenzar la tabla en un par de valores x_0, y_0 que verifican $x_0 = a$ y $G(x_0, y_0) = 0$ y proceder por incrementos en x hasta llegar al valor $x_N = b$.

    En cada paso se obtiene el valor de y_{n+1} aplicando el método N-R a la función $G(x_{n+1}, y)$ donde y es la variable y x_{n+1} permanece fijo; con valor inicial el valor de y_n obtenido en el paso anterior. Dado que la función $y(x)$ se supone continua, esta elección del valor inicial se supone apropiada.

    (a) Aplicar el método para la ecuación $G(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, comenzando en $x_0 = 0, y_0 = 1$ para valores de x en $[0, 1]$. Graficar junto con la solución que se obtiene de despejar analíticamente y comparar. Utilizar distintos valores para el incremento y para la cantidad de iteraciones del método N-R en cada paso.

    (b) Aplicar el método para $G(x, y) = 3x^7 + 2y^5 - x^3 + y^3 - 3$. Comenzar la tabla en $x_0 = 0, y_0 = 1$ y proceder por incrementos en x de 0.2 hasta llegar a $x_{50} = 10$.

14. Dada $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ el método N-R generalizado consiste en realizar la iteración vectorial
$$x^{k+1} = x^k - (DF|_{x^k})^{-1}.F(x^k),$$
donde $(DF|_{x^k})^{-1}$ es la inversa de la matriz diferencial de F evaluada en x^k.

    Usar la versión generalizada a varias variables del método N-R para para resolver el sistema de ecuaciones
$$2x - 3y = 0, \quad x^2 - y^2 - 3 = 0$$
comenzando con valores iniciales $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

15. Aproximar la solución positiva de la ecuación $\cos(x) = 2x$, comenzando con $x_0 = 0.5$ y utilizando la iteración de punto fijo $x_{n+1} = \frac{1}{2}\cos(x_n)$. Graficar con `Matlab` la sucesión obtenida.

16. Sea $f(x) = x^3 - x - 1$. La ecuación $f(x) = 0$ tiene una única raíz en el intervalo $(1, 2)$. Se consideran las dos siguientes iteraciones del método de punto fijo para aproximar dicha raíz.
$$g(x) = x^3 - 1, \qquad\qquad h(x) = \sqrt[3]{x + 1}.$$
    (a) Determinar cuáles de estas funciones son apropiadas para la iteración.
    (b) Para las que sí lo sean:
        - Determinar un intervalo inicial I en el cual el método converja.
        - Dar un valor inicial $x_0 \in I$ y la cantidad de iteraciones necesarias para aproximar la raíz de f con error menor que 10^{-5} comenzando con el x_0 dado.

17. Sea $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \dfrac{8x - 1}{x} - e^x$.
    (a) Dibujar la gráfica de f y determinar el número de raíces de la ecuación $f(x) = 0$, localizando cada raíz entre dos enteros consecutivos.
    (b) Para cada una de las siguientes funciones:
$$f_1(x) = \frac{1}{8}(1 + xe^x), \quad f_2(x) = \ln\left(\frac{8x - 1}{x}\right)$$
    consideramos el siguiente método iterativo: dado $x_0 = 1$ sea
$$x_{n+1} = f_i(x_n),\ n \in \mathbb{N},\ (i = 1, 2).$$
    Estudiar si estas sucesiones convergen hacia alguna de las raíces de $f = 0$.
    (c) Utilizando `Matlab`, estimar las raíces con estos dos métodos.

18. Sea g una función tal que g' es continua en $[s, b]$, donde s es un punto fijo de g. Si además, se verifica que $0 \leq g'(x) \leq K < 1$ para todo $x \in [s, b]$, mostrar que la iteración, comenzando con $x_0 \in [s, b]$, converge decrecientemente a s.

19. Sea f una función C^1 en las condiciones del método N-R. Sea $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Mostrar que el método N-R es un método de punto fijo.

20. Para f una función C^2 que tiene una raíz de orden 2 en r:

    (a) Demostrar que el método N-R converge sólo linealmente a r (Sugerencia: Notar que en este caso la g del ejercicio anterior no está definida para $x = r$, redefinirla como $g(r) = r$, probar la diferenciabilidad de g y demostrar que $g'(r) \neq 0$).

    (b) ¿Cuál es el orden de convergencia de la siguiente modificación?

$$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

21. Sea $f(x) = 4x^3 - 3x + 1 = 0$. La ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz doble. Aproximarla calculando las 10 primeras iteraciones de los métodos N-R y N-R con la modificación del ejercicio 20, comenzando con los valores iniciales $x_1 = y_1 = 25$. Graficar simultáneamente las dos sucesiones obtenidas. Calcular numéricamente el orden de convergencia para ambos métodos.

22. Recordar que una raíz múltiple de un polinomio f es una raíz simple del polinomio $f/\text{mcd}(f, f')$, donde mcd indica el máximo común divisor. Hacer un programa en `Matlab` que aplique el método N-R a $f(x)$ y a $f(x)/\text{mcd}(f, f')$ para hallar la raíz múltiple de

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2.$$

    Demostrar que, a pesar que la función f no está en las hipótesis del método N-R, éste converge (aunque no tan velozmente como cuando la raíz múltiple se halla como solución de $f/\text{mcd}(f, f')$). Calcular numéricamente el orden de convergencia en ambos casos.

23. Dada la función $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2$, $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, se construye el siguiente algoritmo para aproximar la raíz $r = 1$:

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$$

    (a) Verificar que si $x_0 > 1$ entonces la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente por 1. Concluir que $x_n \to 1$, aunque esta iteración no está en las hipótesis del teorema del punto fijo. ¿Qué hipótesis no se cumple?

    (b) Dar un algoritmo para aproximar la raíz de f que converja cuadráticamente.

24. Con las mismas hipótesis que en el ejercicio 9, probar que si $x_1 \in (a, x_0)$, la sucesión generada por el método de la secante a partir de x_0 y x_1 converge decrecientemente hacia a.

25. Se quiere resolver la ecuación $f(x) = 0$, donde $f(x) = e^x - 2$. Calcular los 10 primeros términos de las sucesiones generadas por los métodos N-R y de la secante, comenzando con los valores iniciales $x_1 = 3$ para el primer método e $y_1 = 3, y_2 = 2.3$ para el segundo. Graficar simultáneamente las dos sucesiones obtenidas. Calcular numéricamente el orden de convergencia para ambos métodos.