Elementos de Cálculo Numérico

Primer cuatrimestre 2007

Práctica N°8: Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias

1. Utilizar el método de Euler para resolver $\begin{cases} y' = 2y & \text{en } [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$

   empleando pasos $h = 0.1$, $h = 0.05$ y $h = 0.01$. Graficar las tres soluciones numéricas obtenidas junto con la solución exacta.

2. Hacer el mapa de curvas integrales en la región $[0,10] \times [0,10]$ de la ecuación diferencial
$$y'(t) = (y(t) - 5).(\cos^2(t) - 0.5),$$
   graficando simultáneamente, para $k = 0, 1, \ldots, 10$, la solución que se obtiene utilizando el método de Euler con paso $h = 0.01$ y con condición inicial
$$y(0) = k.$$

3. Considerar el problema $\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$.

   (a) Probar que el método de Euler con paso h genera la sucesión:
$$y_i = (1 + \lambda h)^i y_0 \quad i = 0, 1, \ldots.$$

   (b) Mostrar que si $\lambda < 0$, la solución exacta tiende a cero a medida que x crece.

   (c) Para $\lambda < 0$, determinar para qué valores de h ocurre que $y_i \to 0$ cuando $i \to \infty$.

4. Considerar el problema
$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + t^2 + 3 & \text{en } [0,2] \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

   (a) Demostrar que la solución es una función convexa.

   (b) Utilizar los métodos de Euler explícito e implícito, con paso $h = 0.05$ para obtener dos aproximaciones de la solución y graficarlas. Decidir en que región del gráfico deberá situarse la solución analítica del problema.

   (c) Graficar la solución que se logra al utilizar el comando **ode45** de `Matlab`.

5. Considerar la siguiente ecuación diferencial:
$$\begin{cases} y'(t) = & 2y(t) - 5\sin(t) \\ y(0) = & 1 \end{cases}$$
   cuya solución exacta es la función $y(t) = 2\sin(t) + \cos(t)$. Graficar simultáneamente en el intervalo $[0,4]$ la solución exacta y las que se obtienen con los métodos de Euler y Taylor de orden 2, ambos con paso $h = 0.05$.

6. Hallar el error local para los métodos de Euler explícito e implícito.

7. Se quiere estimar, aplicando el método de Euler, el valor de e como $y(1)$ donde $y(t)$ es solución de $y' = y,\ y(0) = 1$. Hallar un paso h de modo que el error cometido resulte menor que 10^{-3}. Realizar el mismo trabajo para el método de Taylor de orden 2.

8. Considerar el problema $y' = -2ty$, $y(0) = 1$, con $t \geq 0$.

   (a) Determinar una cota, en términos de h, para el error cometido si se usa el método de Euler para calcular $y(1)$.

   (b) ¿Cómo debería tomar h si se desea que el error cometido sea menor que 10^{-2}?

   (c) Calcular la solución en $t = 1$ usando el valor de h obtenido en el item previo, y verificar las estimaciones previstas comparando con la solución exacta.

9. Repetir los items (a) y (b) del ejercicio anterior para el problema:

$$\begin{cases} y'(t) = & t\sin^2(y(t)) \\ y(0) = & 1 \end{cases}$$

10. Probar que una ecuación de orden n se puede escribir como un sistema de n ecuaciones de primer orden. Mostrar que un problema de valores iniciales para la primera se transforma en un problema de valores iniciales para el sistema.

11. La trayectoria de una partícula que se se mueve en el plano está dada por las curva $(y_1(t), y_2(t))$, donde las funciones y_1, y_2 son la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & -y_2(t) \\ y_2'(t) & = & y_1(t) - y_2(t) \end{array}.$$

   Resolver este sistema en el intervalo $[0, 20]$ con el método de Euler utilizando paso $h = 0.05$ y graficar la trayectoria de la partícula, sabiendo que en tiempo $t = 0$ se encontraba en el punto $(1, -1)$. Realizar nuevamente el gráfico utilizando la solución obtenida con el comando **ode45**.

12. Escriba un programa que resuelva la ecuación diferencial del Ejercicio 5 por algún método de Runge-Kutta de orden 2 y de orden 4. Agregar estas soluciones al gráfico realizado en dicho ejercicio.

13. Verificar que la función error, **erf**, puede ser definida como la solución de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

   Utilizar un método de Runge-Kutta de orden 2 para hallar $\mathrm{erf}(t_i)$ con $t_i = 0, 0.05$, 0.1, 0.15, $\ldots$, 1. Comparar con los valores obtenidos directamente con el comando **erf** de `Matlab`.

14. Probar que los métodos de Euler, Runge-Kutta y Taylor son consistentes.

15. Considerar el siguiente problema:

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad \text{con } y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Resolver la ecuación analíticamente y aproximar el valor $y(1)$ con un método de Runge-Kutta de orden 2 para distintos valores de h.

16. Considerar la ecuación $y'(t) = f(t, y(t))$.

(a) Deducir la fórmula de Milne:

$$y_n = y_{n-2} + h(\frac{1}{3}f_n + \frac{4}{3}f_{n-1} + \frac{1}{3}f_{n-2}),$$

aproximando la integral

$$\int_{t_{n-2}}^{t_n} f(t, y(t))dt = \int_{t_{n-2}}^{t_n} y'(t)dt = y(t_n) - y(t_{n-2}),$$

con la fórmula de Simpson. Sugerencia: Tener en cuenta el Ejercicio 16 de la Práctica 7.

(b) Proceder en forma análoga al ítem anterior y dar un método multipaso de la forma

$$y_{n+1} - y_n = h\big[Af_n + Bf_{n-1} + Cf_{n-2}\big].$$

(c) Analizar la convergencia (estabilidad y consistencia) de los métodos de los ítems anteriores y calcular su órden.

17. Analizar la convergencia de los siguientes métodos y calcular su órden.

- **Adams-Bashforth.**

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n).$$

- **Adams-Moulton.**

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(5f_{n+3} + 8f_{n+2} - f_{n+1}).$$

18. Considerar el método de 2 pasos

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + ay_n = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_{n+1}).$$

Determinar $a, \beta_2, \beta_1, \beta_0$ de modo que el método resultante tenga orden 4.

19. Decidir si existe algún valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual el siguiente método multipaso sea convergente:

$$y_{n+3} - 3y_{n+2} + (3 - a^2)y_{n+1} + (a^2 - 1)y_n = h[5f_{n+2} + (-a^2 - 5)f_n].$$

20. a) Encuentre los coeficientes A y B de forma tal que el método multipaso

$$y_{n+1} = y_n + Af_n + Bf_{n-2}$$

sea exacto para el caso en que $f(t, y(t)) = at + b$.

b) ¿Es convergente el método resultante para una f cualquiera ?.

c) ¿Cuál es el orden del método?. Calcule el error de truncamiento local.

21. Analice el orden del siguiente método

$$y_n = y_{n-3} + \frac{3}{8}h(f_n + 3f_{n-1} + 3f_{n-2} + f_{n-3})$$