Ecuación de Burgers

Elementos de Cálculo Numérico

Segundo Cuatrimestre de 2007

Considerar la ecuación en derivadas parciales de primer orden

$$u_t + u u_x = 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

con dato inicial

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

y condiciones de contorno:

$$u(-\infty, t) = u_0(-\infty) \quad \text{para todo } t > 0.$$

1. Sea $u_0(x) = (1+e^x)^{-1}e^x$. Resolver utilizando el siguiente método explícito de primer orden en t:
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \triangle t\ u_i^n \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\triangle x} \right).$$
¿Cómo implementar las condiciones de contorno ?
¿Necesita una condición de contorno a la derecha?
Utilice $\triangle x = 0.1$ y pruebe con valores de $\triangle t = 0.2$, y $\triangle t = 0.05$. Qué observa?

2. Repetir el análisis para $u_0(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

3. Para el problema del item 2 utilizar el esquema explícito con "up-wind"
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \triangle t u_i^n \left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\triangle x} \right).$$
Utilizar $\triangle x = 0.1$, y $\triangle t = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$. Analizar los resultados.

En todos los casos, dibujar los perfiles $u(\cdot, t)$ obtenidos a varios tiempos diferentes, y compararlos. Analizar la influencia del dato de contorno, y de qué depende la aparición de un shock. Puede usar el comando movie para generar una película de la evolución de la dinámica.