# Oscilaciones de una membrana cuadrada
# Método de separación de variables

Elementos de Cálculo Numérico

Segundo Cuatrimestre 2007

El problema de la oscilación de una membrana cuadrada fija por sus bordes en $\Omega := [0,1]\times[0,1]$ puede ser descripto, al menos para pequeñas elongaciones, por la ecuación de ondas con condición de contorno

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x,y) = \Delta u(t,x,y) & \text{por todo } (x,y) \in \Omega \ , t > 0 \\ u(t,x,y) = 0 & \text{por todo } (x,y) \in \partial\Omega \ , t \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Aquí $\Delta u$ es el Laplaciano de $u$ definido por $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Los datos iniciales adecuados son por ejemplo la posición inicial de la membrana, y su velocidad inicial.

Resolviendo por el método de separación de variables se buscan soluciones de la forma

$$u(t,x,y) = T(t)Z(x,y),$$

de modo que

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\Delta Z(x,y)}{Z(x,y)} = \lambda$$

para alguna constante $\lambda$. Usando la condición de contorno tenemos que

$$Z|_{\partial\Omega} = 0.$$

Luego $\lambda$ es un autovalor del Laplaciano $\Delta$ con datos de contorno de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta Z = \lambda Z & \text{en} \quad \Omega \\ Z|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Se sabe que los autovalores $\lambda_n$ de $\Delta$ son negativos y que $\lambda_n \to -\infty$ cuando $n \to +\infty$. Sea $Z_n$ una autofunción asociada a $\lambda_n$. Por $\lambda = \lambda_n$, $T = T_n$ es solución de la ecuación

$$T''(t) - \lambda_n T(t) = 0.$$

Escribiendo $\lambda_n = -\omega_n^2$, obtenemos $T_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$. De este modo hemos encontrado soluciones de (1) de la forma

$$u(t,x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) Z_n(x,y), \tag{3}$$

donde los valores $a_n$ y $b_n$ se obtienen a partir de las condiciones iniciales. A los autovalores $\lambda_n$ se los llama los *modos normales de oscilación.*

Para hallar las soluciones en la forma (3) necesita calcular los autovalores $\lambda_n$ y las autofunciones $Z_n$ del Laplaciano en $\Omega$. Por eso introduzca una discretización del dominio $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ con una malla $(x_i, y_j) = (i/N, j/N)$, $0 \leq i, j \leq N$, donde $N$ es grande. Sea $h = \frac{1}{N}$.

1. Cálculo de los $\lambda_n$ y los $Z_n$.

   Discretizamos la ecuación (2) sobre la malla introducida y obtenemos el esquema

   $$\frac{z_{i+1,j} - 2z_{i,j} + z_{i-1,j}}{h^2} + \frac{z_{i,j+1} - 2z_{i,j} + z_{i,j-1}}{h^2} = \lambda z_{i,j} \quad i, j = 1, \ldots, N-1$$

   donde $z_{ij}$ es una aproximación de $Z(x_i, y_j)$.

   *a*) Reescribir esto como un problema lineal $Az = \lambda z$.

   *b*) Usar el comando *eig* de matlab para encontrar los autovalores y autofunciones de $A$ (si quiere, se puede usar también el método de las potencias).

2. Introduzca estos autovalores y autofunciones en la fórmula (3) para resolver (1) con dato inicial

   $$u_0(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

   y velocidad inicial cero (es decir $u_t(0, x, y) = 0$)).

3. Introduciendo una discretización en el tiempo obtenga una animación usando el comando *movie* de Matlab.