Oscilaciones de una membrana cuadrada
Método de discretización espacio temporal

Elementos de Cálculo Numérico

Segundo Cuatrimestre de 2007

El problema de la oscilación de una membrana cuadrada fija por sus bordes en $\Omega := [0,1]\times[0,1]$ puede ser descripto, al menos para pequeñas elongaciones, por la ecuación de ondas con condición de contorno

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x,y) = \Delta u(t,x,y) & \text{por todo } (x,y) \in \Omega \ , t > 0 \\ u(t,x,y) = 0 & \text{por todo } (x,y) \in \partial\Omega \ , t \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Aquí Δu es el Laplaciano de u definido por $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Los datos iniciales adecuados son por ejemplo la posición inicial de la membrana, y su velocidad inicial:

$$\begin{cases} u\,(0,x,y) = u_0\,(x,y) & (x,y) \in \Omega \\ u_t\,(0,x,y) = g(x,y) & (x,y) \in \Omega \end{cases}$$

Introduzca una discretización de Ω con una malla $(x_i, y_j) = (i/N, j/N)$, $0 \leq i,j \leq N$. Sea $h = \frac{1}{N}$. En el tiempo también introduzca un paso temporal $\triangle t$ de modo que $t_k = k\triangle t$. De la ecuación (1) se obtiene el esquema numérico

$$u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j}^{n-1} - 2u_{i,j}^{n} = \frac{\triangle t^2}{h^2}(u_{i+1,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n} + u_{i,j+1}^{n} + u_{i,j-1}^{n} - 4u_{i,j}^{n}), \tag{2}$$

donde $u_{i,j}^n$ es una aproxiación de $u(t_n, x_i, y_j)$. Por lo tanto, suponiendo conocidos la posición de la membrana en el tiempo $t = 0$ y en el tiempo $-\triangle t$, se puede calcular la posición para cualquier t_k posterior. La solución en el tiempo $t = 0$ es el dato inicial u_0. La condición inicial en la derivada respecto del tiempo le permite plantear la ecuación

$$\frac{u_{i,j}^1 - u_{i,j}^{-1}}{2\Delta t} = g(x_i, y_i)$$

de la cual puede despejar el valor de $u_{i,j}^{-1}$. Reemplazando este valor en la ecuación (2) para $n = 0$, se obtiene el valor de u_1.

1. Escriba un programa que resuelva el problema de la membrana, con dato de contorno 0, y para datos iniciales cualesquiera. Grafique las soluciones para algunos casos que le interesen.

2. Calcule la solución a tiempo 1 correspondiente a una membrana con posición inicial

$$u_0(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

y velocidad inicial cero. Comparando con la solución exacta

$$u(t, x, y) = \sin(\sqrt{2}\pi t)\sin(\pi x)\sin(\pi y),$$

grafique los errores en función de h, dt. ¿Cuál es el orden de convergencia del método?

3. Introduciendo una discretización en el tiempo, obtenga una animación usando el comando *movie* de Matlab.