Método de las potencias para el cálculo de autovalores de una matriz

Elementos de Cálculo Numérico

Segundo Cuatrimestre de 2007

Consideramos una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizable, i.e. tal que existe una base de autovectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$, cada u_i siendo un autovector por un autovalor λ_i. Supongamos que A tiene un único autovalor de módulo máximo. Luego podemos ordenar sus autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de la siguiente manera:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.$$

El método de las potencias es un algoritmo que halla λ_1 y un autovector asociado basándose en el calculo de las potencias de A. Dado un vector $v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$, $\alpha_1 \neq 0$, consideramos la sucesión $(v_k) \subset \mathbb{R}^n$ definida por

$$v_k = A^k v.$$

Aunque en general **no vale** que la sucesión (v_k) es convergente, lo que sí es cierto es que a medida que $k \to +\infty$, los vectores v_k se van alineando con u_1:

$$v_k = \alpha_1 \lambda_1^k (u_1 + \epsilon_k)$$

con $\epsilon_k \to 0$ (verifiquelo !). Luego, si ϕ es una función lineal cualquiera (por ejemplo la que evalúa una coordenada de un vector),

$$r_k := \frac{\phi(v_{k+1})}{\phi(v_k)} = \lambda_1 \frac{\phi(w) + \phi\left(\varepsilon^{(k+1)}\right)}{\phi(w) + \phi\left(\varepsilon^{(k)}\right)} \to \lambda_1 \tag{1}$$

En la implementación práctica también conviene ir normalizando los v_k para descartar los casos en que los v_k convergen a 0 o divergen en módulo.

Matrices simétricas Supongamos ahora que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica y que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|.$$

Entonces por el método antes descripto podemos calcular λ_1 y un autovector asociado w_1. Queremos hallar un método que nos permita calcular los otros autovalores. Para esto usamos el siguiente resultado:

la matriz

$$B = A - \lambda_1 \frac{w_1 w_1^t}{\|w_1\|_2^2}$$

es simétrica y tiene por autovalores a $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Además, si w_2 es un autovector de B asociado al autovalor λ_2, es también autovector de A asociado al mismo autovalor (verifíquelo).

Por lo tanto, para calcular λ_2 podemos aplicarle el método a B. ¿Cómo seguiría para calcular λ_3 y todos los demás autovalores?.

Aceleración (Aitken) Si $(r_k)_k$ es la sucesión de (1), consideremos la nueva sucesión $(s_k)_k$ definida por

$$s_k = \frac{r_k r_{k+2} - r_{k+1}^2}{r_{k+2} - 2r_{k+1} + r_k}.$$

Muestre que $s_k \to \lambda_1$ más rapidamente que $(r_k)_k$.

Ejemplos En cada uno de los siguientes casos encuentre el autovalor de módulo mayor y su correspondiente autovector. Si la matriz es simétrica encuentre todos los autovalores. Muestre en una tabla como se comporta el error del método e intente deducir empíricamente cuál es el orden del mismo. Repita la estimación para la sucesión de Aitken.

1. $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, comenzando en $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Sugerencia: tome como función lineal para el cálculo práctico a $\phi(x_1, x_2, x_3) = x_2$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Elija el vector inicial v y la función ϕ.