Integración por el método de Monte Carlo. Resolución de la ecuación de Laplace

Elementos de Cálculo Numérico

Segundo Cuatrimestre de 2007

Las técnicas basadas en el método de Monte Carlo emplean números aleatorios (o seudoaleatorios) para resolver distintos tipos de problemas. En primer lugar usaremos el método de Monte Carlo para el cálculo de integrales reales y luego veremos una adaptación de estos métodos para el cálculo de la solución de la ecuación de Laplace 2-D con datos de borde en un dominio acotado plano.

Calculo de integrales

Los comandos *rand* y *rand(m,n)* de Matlab proveen respectivamente un número o una matriz de $m \times n$ de números aleatoreos uniformemente distribuidos en el $[0, 1]$ (si está interesado averigüe cual es algún algoritmo para generar estos números).

1. Dada una sucesión de números aleatorios $(x_n) \subset [0, 1]$ con distribución uniforme en $[0, 1]$, verifique que una aproximación a la integral de una función f en $[0, 1]$ es

$$\int_0^1 f(x)\, dx \simeq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

   Pruébelo sobre una función que conozca la integral y grafique el error en función de n.

2. Analice cómo aplicaría este método si el intervalo de integración es uno genérico $[a, b]$.

3. Podemos extender este método a integrales m dimensionales:

$$\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_m}^{b_m} f(x^1, \ldots, x^m)\, \frac{dx^1 \ldots dx^m}{(b_1 - a_1)\ldots(b_m - a_m)} \simeq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^1, \ldots, x_i^m).$$

   Aplique esta técnica para el cálculo del volumen en varias dimensiones (por lo menos en $m = 3$).

   Este es un método económico para calcular, por ejemplo, el volumen de la esfera m dimensional (¿conoce la respuesta exacta a este problema?).

Ecuación de Laplace

Considere la ecuación de Laplace en un dominio suave $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = g(x,y) & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

donde $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ es el Laplaciano de u.

Esta ecuación modela por ejemplo el potencial eléctrico dentro de Ω cuyo contorno se encuentra a potencial g, o el estado estacionario de la temperatura en Ω cuando el borde se mantiene a temperatura g.

El algoritmo de Monte Carlo para aproximar u consiste en lo siguiente. Al introducir una discretización por diferencias finitas de (1), sobre una malla suficientemente fina, también introducimos probabilidades de transición entre los nodos de esta malla. Esto se debe a que la misma manera de discretizar está asignándole un peso a cada nodo vecino en el cálculo del valor de la solución de la ecuación en un nodo dado. La idea del método es que para conocer el valor de la solución u en un nodo (x_i, y_j) de la malla, se larga una partícula desde ese nodo y se la hace evolucionar de acuerdo a las probabilidades de transición calculadas, hasta que choca con el borde, almacenándose el valor del dato de contorno en ese punto. Se repite este procedimiento con una grande cantidad M de partículas, y se estima el valor de $u(x_i, y_j)$ como el promedio de esos valores.

En primer lugar puede aplicar este método en el dominio rectangular $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ con $u(x,y) = \sin(\pi x)e^{\pi y}$ (i.e. $g(0,.) = g(1,.) = 0$, $g(x,0) = \sin(\pi x)$, $g(x,1) = e^{\pi} \sin(\pi x)$):

1. Defina una malla rectangular: $x_i = i/N$, $y_i = i/N$, $0 \leq i \leq N$, con N un valor adecuado (podría comenzar con $N \sim 10$, por ejemplo).

2. La discretización habitual del Laplaciano conduce a la siguiente ecuación:

$$\Delta u(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2} = 0,$$

   donde $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$, lo que da las siguientes probabilidades de transición: *una partícula en el nodo* (x_i, y_j) *tiene probabilidad* $1/4$ *de pasar a cualquiera de los cuatro nodos adyacentes.*

3. Utilice estas probabilidades de transición y el procedimiento descripto anteriormente para calcular la solución en el punto $(x,y) = (1/2, 1/2)$ por ejemplo. Compare con la solución exacta $u(1/2, 1/2) \simeq 4,8$. Repita este cálculo para varios valores de N, y para varios números diferentes de partículas (valores de $M \sim 1000$ o mayores, podrían ser adecuados). Haga gráficos del error en función de N y de M.

En segundo lugar, puede apliquar el método para hallar la solución en la corona circular $\Omega = \{1 \leq r \leq 3,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$ con dato de contorno $g(1,\theta) = 4$, $g(3,\theta) = 6$ (donde (r,θ) son las coordenadas polares).