Elementos de Cálculo Numérico

Práctica N°6: Polinomios ortogonales y aproximación por cuadrados mínimos

1. (a) Encontrar el polinomio de grado 1 que aproxima en el sentido de cuadrados mínimos la siguiente tabla de datos:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	-.1	1.1	1.9	3.2	3.8	5	6	7.3	8.1	8.9

y el polinomio de grado 2 que aproxima en el mismo sentido la siguiente tabla de datos:

x	-1	0	1	3	6
y	6.1	2.8	2.2	6	26.9

(b) En cada caso, comparar gráficamente, usando Matlab, con el polinomio interpolador.

2. Considerar la función $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$ en el intervalo [-1,1].

Para $n = 5, 10, 15$; graficar simultáneamente f junto con

- los polinomios que aproximan a f en el sentido de cuadrados mínimos en $n+1$ puntos equiespaciados y tienen grado $\frac{2}{5}n$ y $\frac{4}{5}n$,
- el polinomio que resulta de interpolar a f en los puntos anteriores.

3. Probar que si se tienen $n+1$ puntos distintos, el polinomio de cuadrados mínimos de grado n coincide con el polinomio interpolador. Concluir que para ciertas aplicaciones puede ser una mala idea aumentar el grado del polinomio de cuadrados mínimos, hasta hacerlo cercano al grado del polinomio interpolador.

4. Hallar la constante o polinomio de grado 0 que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos a una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en n puntos $x_1, \dots, x_n$ en $[a, b]$.

5. Sea A la matriz en $\mathbb{R}^{3\times 2}$ dada por $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$. Mostrar que

(a) $\det(A^T A) = (ad - bc)^2 + (af - be)^2 + (cf - ed)^2$.

(b) Los rangos de las matrices $A^T A$ y A coinciden.

(c) El polinomio de grado 1 que aproxima en el sentido de cuadrados mínimos una tabla de 3 datos es único.

6. Sea S el subespacio de funciones continuas definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ generado por las funciones del conjunto $B = \{1, x, 2^x, 3^x\}$. Para $i = 0, 1, 2, 3$, sea $x_i = i$, y sea T un conjunto de datos del tipo $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$.

   (a) Demostrar que B es una base de S y que para todo conjunto de datos T existe una única función $p \in S$ tal que p interpola a T.

   (b) Demostrar que $\langle p, q\rangle = \sum_{i=0}^{3} p(x_i)q(x_i)$ es un producto interno en S.

   (c) Aproximar la siguiente tabla de datos en el sentido de cuadrados mínimos

x	0	1	2	3
y	0.3	-0.2	7.3	23.3

   con funciones del tipo: (a) $y = a2^x + b3^x$, (b) $y = a2^x + b3^x + c$.

   (d) Graficar los resultados obtenidos junto con los valores de la tabla de datos.

7. Considerar $\operatorname{erf} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

   (a) Graficar la función con el comando erf de Matlab en el intervalo $[-15, 15]$. Observar que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{erf}(x) = \pm 1$.

   (b) Aproximar la función erf en el sentido de cuadrados mínimos con polinomios de grado 1, 3 y 5; considerando 20 puntos equiespaciados en el intervalo $[-10, 10]$. Graficar erf junto con estos polinomios en el intervalo $[-15, 15]$. Observar que la aproximación es mala fuera del intervalo $[-10, 10]$.

   (c) Se quiere aproximar nuevamente la funcion erf en el sentido de cuadrados mínimos con una combinación lineal de funciones que compartan con erf la propiedad de ser acotada e impar. Para ello, ajustar la función erf con una función del tipo

$$c_1 x e^{-x^2} + c_2 \arctan(x) + c_3 \frac{x}{x^2+1},$$

   considerando 20 puntos equiespaciados en el intervalo $[-10, 10]$. Graficar erf junto a esta aproximación en el intervalo $[-15, 15]$ y comparar con el ítem (b).

8. Aproximar los datos de la tabla siguiente con un modelo de la forma $f(x) \sim ae^{bx}$ en el sentido de cuadrados mínimos para la función $\ln(f(x))$.

x	-1	0	1	2
y	8.1	3	1.1	0.5

9. Aproximar los datos de la tabla siguiente con un modelo de la forma $f(x) \sim -e^{ax^2+bx+c}$ en el sentido de cuadrados mínimos para la función $\ln(-f(x))$.

x	-1	0	1	2
y	- 1.1	- 0.4	- 0.9	- 2.7

10. Decidir en cada caso, cuáles de las siguientes aplicaciones $\langle\ ,\ \rangle : S \times S \to \mathbb{R}$, son productos internos:

    (a) $\langle f, g\rangle \ = f(0) + f(1) + 2g(0), \quad S = \mathbb{R}_1[X]$,

    (b) $\langle f, g\rangle \ = f(0)g(0) + f(1)g(1), \quad S = \mathbb{R}_2[X]$,

    (c) $\langle f, g\rangle \ = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2), \quad S = \mathbb{R}_2[X]$.

    (d) $\langle f, g\rangle \ = f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)dt, \quad S = \mathcal{C}^1([0,1])$,

    Aclaración: $\mathbb{R}_m[X]$ denota el subespacio de polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que m.

11. Considerar
$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)\ dx$$

    (a) Probar que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno en S_m, el espacio generado por $\{x, x^2, x^3, \cdots, x^m\}$.

    (b) Hallar una base ortonormal para S_3.

    (c) Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos sobre S_3 para $f(x) = x^4$.

12. Sea
$$\langle f, g\rangle = f(1)g(1) - f(-1)g(-1) + \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)dx.$$

    a) Decidir si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno en $C^1([-1,1])$.

    b) Probar que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno para el espacio $V = \{f \in C^1([-1,1]) : f \text{ es impar}\}$.

    c) Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos del polinomio $p(x) = x^5$ sobre el subespacio S generado por $\{x, x^3\}$.

13. (a) Demostrar que
$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f''(x)g''(x)dx + f(-1)g(-1) + f(1)g(1)$$
    es un producto interno en el espacio $\mathcal{C}^2([-1,1])$.

    (b) Hallar una base ortnormal de $\mathbb{R}_2[X]$ para el producto interno definido en el ítem anterior.

    (c) Probar que si f es una función par en $\mathcal{C}^2([-1,1])$, entonces su proyección sobre $\mathbb{R}_2[X]$ es par, y que si f es una función impar, entonces su proyección es impar.

14. Sea $\langle f, g\rangle$ alguno de los siguientes productos escalares en $\mathbb{R}_n[X]$:

    - $\langle f, g\rangle = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)g(x_j)w_j$, con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ y $w_j > 0$ para $j = 0, \ldots, n$,
    - $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$ con $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, w(x)\rangle 0 \forall x \in \mathbb{R}$ y $a < b$.

    Probar que $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ no puede ser un conjunto ortogonal para $n \geq 2$.

15. **Polinomios de Laguerre.** Utilizando el método de Gram-Schmidt, calcular los primeros cuatro polinomios mónicos ortogonales con respecto al producto escalar:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty e^{-x} f(x)g(x)dx.$$

16. **Polinomios de Hermite.** Repetir el ejercicio anterior con el producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} f(x)g(x)dx.$$

17. (a) Probar que el conjunto de funciones: $\{\cos(mx),\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es ortogonal con el producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$$

y calcular las normas de cada una de estas funciones. Sugerencia: Usar la fórmula

$$\cos(kx)\cos(jx) = \frac{1}{2}\Big(\cos\big((k+j)x\big) + \cos\big((k-j)x\big)\Big).$$

(b) Verificar la ortogonalidad y calcular la norma de los polinomios de Tchebychev, con el producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Sugerencia: usar el cambio de variables $u = \arccos(x)$.

18. Hallar los primeros 5 términos de la expansión en serie de Tchebychev para la función $f(x) = |x|$. Graficar en el intervalo $[-1, 1]$. Notar la relación entre el peso que hace ortogonal a los polinomios de Tchebychev con la región del gráfico en que la aproximación es mejor.

19. Sea T_j el polinomio de Tchebychev de grado j; $(j \in \mathbb{N})$. Considerar las relaciones de ortogonalidad discretas para éstos polinomios:

$$\sum_{k=1}^m T_i(x_k)T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ m/2 & i = j \neq 0 \\ m & i = j = 0 \end{cases}$$

donde $\{x_k;\ k = 1, \ldots, m\}$ es el conjunto de ceros de T_m.

Para una función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ se definen m coeficientes c_j, $j = 1, \ldots, m$ según

$$c_j = \frac{2}{m}\sum_{k=1}^m f(x_k)T_{j-1}(x_k).$$

Probar que el polinomio $\left[\sum_{k=1}^m c_k T_{k-1}(x)\right] - 0.5c_1$ interpola a f en las raíces de T_m.

(Sugerencia: usar Ejercicio 3).

Notar que esta fórmula proporciona una manera más directa de encontrar el polinomio interpolador en los ceros de T_m.