

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO

**Práctica N°7: Integración numérica**

1. Usar las fórmulas cerradas de Newton-Cotes de dos y tres puntos (reglas de trapecios y de Simpson, respectivamente) para calcular las integrales:

$$\int_0^1 x^4 dx \qquad \int_{0.1}^{0.2} \ln(x) dx \qquad \int_0^3 \frac{1}{1+x} dx$$

Calcular, además, en forma exacta cada una de las integrales anteriores y verificar la cota del error.

2. Interpolando las funciones de base de Lagrange, hallar una fórmula de cuadratura por interpolación de la forma

$$\int_0^{2h} f(x) dx \sim A_0 f(0) + A_1 f(h).$$

3. Usar el método de coeficientes indeterminados para dar una fórmula de cuadratura por interpolación:

$$\int_0^{3h} f(x) dx \sim A_0 f(0) + A_1 f(h) + A_2 f(3h).$$

4. Construir la fórmula abierta de Newton-Cotes para calcular  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  con nodos  $-1/2, 0, 1/2$ , y la fórmula cerrada de Newton-Cotes con nodos en los puntos  $-1, -1/3, 1/3, 1$ .

5. Considerar la función definida en  $[-h, h]$  ( $h > 0$ ):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -h \leq x \leq 0 \\ x, & \text{si } 0 < x \leq h. \end{cases}$$

Hallar el error de la regla de trapecios aplicada a  $f(x)$ . ¿El orden es igual al obtenido para una función suficientemente suave?

6. La fórmula de cuadratura

$$\int_a^b f(x) dx \sim f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

es conocida como *Regla de los Rectángulos*. Para  $f \in C^1[a, b]$  acotar el error que se comete al utilizarla.

7. Para  $f$  una función  $C^2$  probar que el error cometido al usar la fórmula de cuadratura del Ejercicio 2 no excede el valor  $\frac{\|f''\|_\infty}{2} h^3$ .

8. (a) Hallar una fórmula de cuadratura del tipo:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \sim Af(-2) + Bf(0) + Cf(2).$$

- (b) Para  $f \in C^3[-2, 2]$  probar que el error cometido no excede el valor  $\frac{7}{12}\|f^{(3)}\|_\infty$ .
9. Escribir un programa que utilice las reglas de trapecios, de Simpson, de trapecios compuesta y de Simpson compuesta para calcular aproximaciones de la integral de una función  $f(x)$  en un intervalo  $[a, b]$ .
10. Se sabe que  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ .
- (a) Para  $n = 1, \dots, 100$ , utilizar las reglas de trapecios y Simpson compuestas para aproximar numéricamente la integral y dar un valor cercano a  $\pi$ .
- (b) Graficar las sucesiones obtenidas junto con el valor de  $\pi$  que arroja **Matlab** y el valor que se obtiene al aplicar la rutina **quad** de **Matlab**.
11. (a) Calcular exactamente la integral

$$I = \int_0^{2\pi} [1 - \cos(32x)] dx.$$

- (b) Aproximar el valor de  $I$  usando el programa del Ejercicio 9 con los métodos de los trapecios, Simpson, trapecios compuesta y Simpson compuesta para  $n = 2, 4, 8$  y  $16$ .
- (c) Calcular el valor de  $I$  que produce la rutina **quad**.
12. Se quiere calcular  $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$  utilizando la regla de trapecios compuesta, partiendo el intervalo  $[-1, 1]$  en  $n$  subintervalos. Hallar  $n$  de modo que el error sea menor que  $10^{-3}$ .

13. La expresión  $Q_n(f) = \sum_{j=0}^n A_j f(x_j)$  define una fórmula de cuadratura.

- (a) Probar que  $Q_n$  es lineal en  $f$  (el conjunto de funciones).
- (b) Supongamos que  $Q_n(f) \sim \int_a^b f(x)w(x) dx$  y que es exacta para las funciones  $1, x, \dots, x^k$ . Mostrar que la fórmula tiene grado de precisión por lo menos  $k$ .
14. Determinar el grado de precisión de las fórmulas para  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ :
- (a)  $\frac{4}{3}f(-0.5) - \frac{2}{3}f(0) + \frac{4}{3}f(0.5)$ .
- (b)  $\frac{1}{4}f(-1) + \frac{3}{4}f(-\frac{1}{3}) + \frac{3}{4}f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{4}f(1)$ .
15. Hallar reglas de cuadratura de grado de precisión máximo para aproximar  $\int_{-3}^3 f(x) dx$ , de las siguientes formas:

- (a)  $A[f(x_0) + f(x_1)]$  (repetiendo el coeficiente).
- (b)  $Af(x_0) + Bf(x_0 + 4)$ .

y determinar cuáles son dichos grados.

16. Sea  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función estrictamente positiva. Demostrar que para todo conjunto de nodos  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , coeficientes  $A_1, \dots, A_n$ , y para todo intervalo  $[c, d]$ ; el grado de precisión de la forma de cuadratura

$$\sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \sim \int_a^b f(x)w(x)dx$$

es el mismo que el de la forma

$$\sum_{i=1}^n B_i f(y_i) \sim \int_c^d f(x)\tilde{w}(x)dx$$

donde  $l : [a, b] \rightarrow [c, d]$  es la función lineal que transforma al intervalo  $[a, b]$  en el intervalo  $[c, d]$ ,  $B_i = \frac{d-c}{b-a}A_i$ ,  $y_i = l(x_i)$  y  $\hat{w} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por  $\hat{w}(x) = w(l^{-1}(x))$ .

17. Calcular  $\int_{-1}^1 f(x)x^2 dx$  mediante una regla de cuadratura de la forma

$$\int_{-1}^1 f(x)x^2 dx \sim A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 3.

18. (a) Hallar una regla de cuadratura del siguiente tipo

$$\int_{-1}^1 f(x)\sqrt{|x|}dx \sim A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1).$$

que tenga grado de precisión máximo. ¿Cuál es dicho grado?

- (b) Hallar una regla de cuadratura del siguiente tipo

$$\int_0^4 f(x)\sqrt{\left|\frac{x-2}{2}\right|}dx \sim A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1).$$

que tenga grado de precisión máximo. ¿Cuál es dicho grado? Sugerencia: Usar el ejercicio 16.

19. Sea  $w$  una función de peso. Se considera la regla de cuadratura de 1 punto:

$$\int_a^b f(x)w(x) dx \sim A_0 f(s).$$

- (a) Probar que, cualquiera sea  $w$ , la fórmula tiene grado de precisión máximo si

$$s = \frac{\int_a^b xw(x) dx}{\int_a^b w(x) dx}.$$

- (b) Probar que si  $w(x) \equiv 1$ , esta regla coincide con la regla de los rectángulos.

- (c) Considerar el intervalo  $[-1, 1]$  y  $w(x) = (x-1)^2$ . Acotar el error que produce el uso de esta regla para funciones  $C^1$ .

20. Hallar los pesos y los nodos de las fórmulas de Gauss-Legendre de dos y tres puntos. (Los polinomios de Legendre mónicos de grado dos y tres son  $x^2 - \frac{1}{3}$  y  $x^3 - \frac{3}{5}x$ ).

21. Usar las fórmulas de Gauss-Legendre de tres puntos para estimar:

$$(a) \int_{-1}^1 \sin(3x) dx, \quad (b) \int_1^3 \ln(x) dx, \quad (c) \int_1^2 e^{x^2} dx.$$

22. Probar que una fórmula de cuadratura

$$\int_a^b f(x)w(x) dx \sim Q_n(f) = \sum_{j=0}^n A_j f(x_j)$$

no puede tener grado de precisión mayor que  $2n + 1$ , independientemente de la elección de los coeficientes ( $A_j$ ) y de los nodos ( $x_j$ ).

Sugerencia: Hallar un polinomio  $p \in \mathbb{R}_{2n+2}[X]$  para el cual  $Q_n(p) \neq \int_a^b p(x)w(x) dx$ .

23. Para  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, se quiere dar una fórmula de cuadratura que aproxime  $\iint_D f(x, y) dx dy$  con  $D \subset \mathbb{R}^2$  usando el Teorema de Fubini de la siguiente manera:

(a) Si  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ , se define la función  $F(x) = \int_0^1 f(x, y) dy$  y luego

- Se aproximan los valores  $F(0), F(\frac{1}{2}), F(1)$  con la regla de Simpson.
- Se aproxima  $\int_0^1 F(x) dx$  usando otra vez la misma regla.

Hallar explícitamente la regla que se obtiene. (Los nodos a considerar serán  $\{(0, 0), (\frac{1}{2}, 0), (1, 0), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, \frac{1}{2}), (0, 1), (\frac{1}{2}, 1), (1, 1)\}$ ).

(b) Repetir el procedimiento y dar la fórmula correspondiente para  $D$  el triángulo de vértices  $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ .

Sugerencia: considerar  $F(x) = \int_0^x f(x, y) dy$ .

(c) Probar que si  $D$  es el triángulo de vértices  $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$  la fórmula anterior es exacta para  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .