Métodos Multipaso lineales

Consideramos el problema de valores iniciales (PVI)

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \qquad a \le x \le b \\ y(a) &= \alpha \end{aligned}$$

Dado N, definimos $h = (b-a)/N$ y sea $\{x_n = a + nh : n = 0, \dots, N\}$ una parción de $[a,b]$. Un método multipaso a k pasos (MM) consiste en calcular $y_0, y_1, \dots, y_N$ que verifiquen la siguiente ecuación en diferencias:

$$\alpha_k y_{n+k} + \alpha_{k-1} y_{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 y_n = h\left[\beta_k f_{n+k} + \beta_{k-1} f_{n+k-1} + \cdots + \beta_0 f_n\right]$$

para $n = 0, \dots, N-k$. Se supone que $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ son conocidos previamente. $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ y $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ son constantes independientes del paso n que identifican el método multipaso bajo consideración. Estamos usando la notación

$$f_q = f(x_q, y_q).$$

Suponemos $\alpha_k \neq 0$ y $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$. Si $\beta_k = 0$ el método se dice *explícito*, sino es *implícito*.

Algunos Ejemplos. A partir de las fórmulas de cuadraturas se pueden deducir métodos multipaso. Por ejemplo, usando la ecuación diferencial tenemos

$$y(x_{n+2}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+2}} y'(x)\,dx = \int_{x_n}^{x_{n+2}} f(x, y(x))\,dx$$

Si aproximamos la integral por la fórmula de Simpson obtenemos

$$\int_{x_n}^{x_{n+2}} f(x,y(x))\,dx \cong \frac{h}{3}(f(x_n, y(x_n)) + 4f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) + f(x_{n+2}, y(x_{n+1}))).$$

Si ahora reemplazamos $y(x_i)$ por y_i (que esperamos sea una buena aproximación) llegamos al siguiente método multipaso

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f(x_{n+2}, y_{n+1}) + 4f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n)) \qquad n = 0, 1, \dots, N-2.$$

Este es el *método de Milne* para el cual tenemos

$$\alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_0 = 1, \quad \beta_2 = \frac{1}{3}, \quad \beta_1 = \frac{4}{3}, \quad \beta_0 = \frac{1}{3}.$$

Ejercicio. (Ejemplo 8.16 en el apunte de Durán, Lasalle y Rossi) Hallar un método multipaso que provenga de aproximar la integral $\int_{x_{n+1}}^{x_{n+3}} y'(x)\,dx$ por una fórmula de cuadratura con nodos x_n, x_{n+1} y x_{n+2}.

Si se usa una fórmula del tipo

$$y(x_{n+k}) - y(x_{n+k-1}) = \int_{y_{n+k-1}}^{y_{n+k}} y'(x)\,dx \cong h\,[\beta_k y'(x_n + k) + \ldots + \beta_0 y'(x_n)]$$

se obtienen los *métodos de Adams*. Cuando son explícitos se llaman de Adams-Bashforth, y si son implícitos se llaman de Adams-Moulton.

Ejercicio. Deducir los siguientes métodos de Adams:
Adams-Bashforth

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= hf_n \qquad \text{(Euler)} \\ y_{n+2} - y_{n+1} &= \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n) \\ y_{n+3} - y_{n+2} &= \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n) \end{aligned}$$

Adams-Moulton

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= hf_{n+1} \qquad \text{(Euler implícito)} \\ y_{n+1} - y_n &= \frac{h}{2}(f_{n+1} - f_n) \\ y_{n+2} - y_{n+1} &= \frac{h}{12}(5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n) \end{aligned}$$

Definición 1 (de convergencia) *Decimos que (MM) es convergente si cualquiera sea la condición inicial $y(a) = \alpha$ vale la siguiente propiedad: Si*

$$\lim_{h\to 0} y_i = y(a), \qquad i = 0, 1, \ldots, k-1,$$

entonces

$$\lim_{h\to 0} \max_{0\le n\le N} |y(t_n) - y_n| = 0.$$

Notar que N (y los x_n) depende de h.

A continuación estudiaremos dos propiedades importantes de un método numérico que implican la convergencia: la estabilidad y la consistencia.

Definición 2 (de estabilidad) *(MM) se dice estable si existen constantes M_1 y M_2 independientes de h (y entonces de N) tales que para cualquier par de sucesiones $\{y_n\}_{n=0}^N$ y $\{z_n\}_{n=0}^N$ definidas por*

$$\begin{aligned} & y_0, y_1, \ldots, y_{k-1} \ \textit{dados} \\ \sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} &= h\sum_{i=0}^k \beta_i f(x_{n+i}, y_{n+i}) \qquad n = 0, \ldots, N-k \end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
& \qquad z_0, z_1, \ldots, z_{k-1} \ \textit{dados} \\
\sum_{i=0}^{k} \alpha_i z_{n+i} &= h \left[\sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x_{n+i}, z_{n+i}) + \varepsilon_n \right] \qquad n = 0, \ldots, N-k
\end{aligned}
$$

se tiene

$$
\max_{0 \le n \le N} |y_n - z_n| \le M_1 \max_{0 \le i \le k-1} |y_i - z_i| + M_2 \max_{0 \le n \le N-k} |\varepsilon_n|. \tag{1}
$$

Definición 3 (de error de truncamiento local) *El error de truncamiento local en el paso n-simo, $n = 0, \ldots, N-k$, es el número τ_n dado por*

$$
\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y(x_{n+i}) = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x_{n+i}, y(x_{n+i})) + h\tau_n \tag{2}
$$

siendo $y(x)$ la solución de (PVI). Esta definición depende de la solución del problema (PVI).

Como ejemplo podemos calcular el error de truncamiento local para el método de Milne. Usando la fórmula del error para la fórmula de Simpson tenemos

$$
\begin{aligned}
y(x_{n+2}) - y_{x_n} &= \int_{x_n}^{x_{n+2}} y'(x)\, dx \\
&= \frac{h}{3}(y'(x_n) + 4y'(x_{n+1}) + y'(x_{n+2})) - \frac{1}{90} h^5 y^{\mathrm{v}}(\xi_n) \\
&= \frac{h}{3}(f(x_n, y(x_n)) + 4f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) + f(x_{n+2}, y(x_{n+1}))) - \frac{1}{90} h^5 y^{\mathrm{v}}(\xi_n),
\end{aligned}
$$

(notar que estamos integrando y', por eso aparece la derivada quinta de y) para algún $\xi_n \in (x_n, x_{n+2})$. Por lo tanto

$$
\tau_n = -\frac{1}{90} h^4 y^{\mathrm{v}}(\xi_n).
$$

Si $y \in \mathcal{C}^6([a, b])$ podemos escribir

$$
\begin{aligned}
\tau_n &= -\frac{1}{90} h^4 y^{\mathrm{v}}(x_n) + \frac{1}{90} h^4 \left(y^{\mathrm{v}}(x_n) - y^{\mathrm{v}}(\xi_n) \right) \\
&= -\frac{1}{90} h^4 y^{\mathrm{v}}(x_n) + E_n,
\end{aligned} \tag{3}
$$

con $E_n \le Ch^5$ donde podemos elegir $C = 2\|y^{\mathrm{vi}}\|_{\infty,[a,b]}/90$ (Verificar!).

Definición 4 (de consistencia) *El método (MM) se dice consistente si*

$$
\lim_{h \to 0} \max_{0 \le n \le N-k} |\tau_n| = 0
$$

para toda solución suficientemente regular y de $y' = f(x, y)$.

Teorema 1 *Si el método a k pasos (MM) es estable y consistente entonces es convergente.*

Demostración. Hecha en clase. $\square$

Volvemos a la definición de error de truncamiento local. Teniendo en cuenta que $y'(x_{n+i}) = f(x_{n+i}, y(x_{n+i}))$, y que $x_{n+i} = x_n + hi$ de la ecuación (2) obtenemos

$$h\tau_n = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i y(x_n + hi) - h \sum_{i=0}^{k} \beta_i y'(x_n + hi).$$

Dejando n fijo, ponemos $x = x_n$ y entonces escribimos la ecuación anterior sin el subíndice n:

$$h\tau = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i y(x + hi) - h \sum_{i=0}^{k} \beta_i y'(x + hi). \tag{4}$$

Si $y(x)$ es suficientemente regular, digamos $q + 1$ veces derivable, podemos escribir $h\tau$ en la forma

$$h\tau = C_0 y(x) + C_1 h y'(x) + C_2 h^2 y''(x) + \ldots + C_q h^q y^{(q)}(x) + hE_n, \tag{5}$$

con $E(x) = O(h^{q+1})$. Para ver esto escribimos

$$\begin{aligned} y(x + jh) &= y(x) + y'(x)jh + \frac{y''(x)}{2}(jh)^2 + \ldots + \frac{y^{(q)}(x)}{q!}(jh)^q + \frac{y^{(q+1)}(\xi_j)}{(q+1)!}(jh)^{q+1} \\ y'(x + jh) &= y'(x) + y''(x)jh + \frac{y'''(x)}{2}(jh)^2 + \ldots + \frac{y^{(q)}(x)}{(q-1)!}(jh)^{q-1} + \frac{y^{(q+1)}(\eta_j)}{(q)!}(jh)^q \end{aligned}$$

con $\xi_j, \eta_j \in (x, x + jh)$. Reemplazando en (4) e igualando potencias de h llegamos a (5) con

$$\begin{aligned} C_0 &= \alpha_0 + \ldots + \alpha_k, \\ C_1 &= (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + k\alpha_k) - (\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_k) \end{aligned}$$

y para $2 \leq p \leq q$

$$C_p = \frac{1}{p!}(\alpha_1 + 2^p \alpha_2 + \ldots + k^p \alpha_k) - \frac{1}{(p-1)!}(\beta_1 + 2^{p-1}\beta_2 + \ldots + k^{p-1}\beta_p),$$

y además

$$E_n = h^q \left[\frac{1}{(q+1)!} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i y^{(q+1)}(\xi_i) i^{q+1} - \frac{1}{q!} \sum_{i=0}^{k} \beta_i y^{(q+1)}(\eta_i) i^q \right]$$

Notemos que si $y \in \mathcal{C}^{q+1}([a, b])$ entonces existe una constante C independiente de h y n tal que

$$E_n \leq Ch^q, \qquad n = 0, 1, \ldots, N - k.$$

En efecto, basta elegir

$$C = \frac{\|y^{(q+1)}\|_{\infty,[a,b]}}{(q+1)!} \sum_{i=0}^{k} |\alpha_i| i^{q+1} + \frac{\|y^{(q+1)}\|_{\infty,[a,b]}}{q!} \sum_{i=0}^{k} |\beta_i| i^q.$$

Proposición 1 *(MM) es consistente si y solo si $C_0 = C_1 = 0$, esto es, si y solo si tiene orden ≥ 1.*

Demostración. Suponiendo que $y(x)$ es al menos $\mathcal{C}^2([a,b])$, poniendo $q = 1$ en el desarrollo anterior tenemos

$$h\tau_n = C_0 y(x_n) + C_1 h y'(x_n) + hE_n$$

con

$$E_n \leq Ch, \qquad \forall n = 0, 1, \ldots, N-k.$$

con C independiente de h. Así, si $C_0 = C_1 = 0$ resulta $\tau_n \leq Ch$ y por lo tanto $\max\{|\tau_n| : n = 0, \ldots, N-k\} \to 0$ si $h \to 0$.

Recíprocamente, supongamos que el (MM) es consistente, y demostremos entonces que $C_0 = C_1 = 0$. Consideremos el caso particular en que $f(x,y) = 0$ y $\alpha = 1$, esto es, consideramos el problema

$$\begin{aligned} y'(x) &= 0 \\ y(a) &= 1. \end{aligned}$$

La solución de este problema es $y(x) = 1$. El error de truncamiento local viene dado por la definición en la ecuación (2):

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = h\tau_n.$$

Por lo tanto

$$\max_{0 \leq n \leq N-k} |\tau_n| = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = \frac{1}{h} C_0$$

tiende a 0 cuando $h \to 0$ si y solo si $C_0 = 0$.

Ahora consideremos el problema

$$\begin{aligned} y'(x) &= 1 \\ y(a) &= 0. \end{aligned}$$

cya solución es $y(x) = x - a$. Así $y(x_i) = x_i - a = ih$. Poniendo estos datos en la definición del error de truncamiento local τ_0 tenemos

$$\sum_{i=0}^{k} ih\alpha_i = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i + h\tau_0$$

de donde $\tau_0 = C_1$ (que no depende de h). Siendo el método consistente, en particular, τ_0 debe tender a 0 si $h \to 0$, y esto ocurre solamente si $C_1 = 0$. Así concluímos la demostración. $\square$

Definición 5 (de orden de un método multipaso) *Un método multipaso se dice de orden p si $C_0 = C_1 = \ldots = C_p = 0$ y $C_{p+1} \neq 0$.*

Proposición 2 *Si (MM) es de orden p, y la solución $y(x)$ es $\mathcal{C}^{p+2}([a,b])$, entonces el error de truncamiento local en el paso n-simo verifica*

$$\tau_n = C_{p+1} h^p y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+1}).$$

Demostración. Sigue de la expresión (5) con $q = p+1$. $\square$

Como ejemplo, para el método de Milne, tenemos

$$C_0 = 0, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0, \quad C_5 = -\frac{1}{90},$$

y por lo tanto el método es consistente, su orden es 4 y una expresión para el error de truncamiento local es

$$\tau_n = -\frac{1}{90} h^4 y^{\mathrm{v}}(x_n) + O(h^5)$$

que conincide con lo que ya habíamos obtenido en (3).

Definimos los polinomios

$$p(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j \qquad \text{y} \qquad q(z) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j z^j.$$

Como veremos, estos polinomios resultarán útiles para estudiar la estabilidad de (MM). También notemos que

$$C_0 = p(1) \qquad \text{y} \qquad C_1 = p'(1) - q(1).$$

Luego, (MM) es consistente si y sólo si $p(1) = 0$ y $p'(1) = q(1)$.

Proposición 3 (Condición de la raíz) *El método (MM) es estable si y sólo si el polinomio p verifica las siguientes 2 condiciones:*

a) Todas sus raíces tienen módulo ≤ 1.

b) Las eventuales raíces de módulo 1 son simples.

Demostración (de la parte "solo si"). Supongamos que (MM) es estable, y, en la definición de estabilidad consideremos el caso particular de $f(x,y) = 0$ y $\epsilon_n = 0$ para $n = 0, 1, \ldots, N-k$. Sean $\{y_n\}_{n=0}^N$ y $\{z_n\}_{n=0}^N$ las suceciones de la definición de estabilidad para este caso particular, esto es

$$\begin{aligned} & y_0, y_1, \ldots, y_{k-1} \text{ dados} \\ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} &= 0 \qquad n = 0, \ldots, N-k \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} z_0, z_1, \ldots, z_{k-1} & \text{ dados} \\ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i z_{n+i} &= 0 \qquad n = 0, \ldots, N-k. \end{aligned}$$

Elijamos $z_0 = z_1 = \ldots = z_{k-1} = 0$. Por lo tanto de la segunda ecuación resulta que $z_n = 0$ para todo n. Por la estabilidad, existe una constante M_1 independiente de h (y entonces de N), tal que, para este caso muy particular,

$$\max_{0 \le n \le N} |y_n| \le M_1 \max_{0 \le i \le k-1} |y_i|.$$

Recordemos que si $h \to 0$ entonces $N \to \infty$. Resumiendo estamos en la siguiente situación: si la sucesión $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ es definida por

$$\begin{aligned} y_0, y_1, \ldots, y_{k-1} & \text{ dados} \\ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} &= 0 \qquad n = 0, 1, \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

entonces

$$\max_{0 \le n} |y_n| \le M_1 \max_{0 \le i \le k-1} |y_i|.$$

Sea r una raíz de $p(z)$. Sabemos que la sucesión $\{y_n\}$ definida por $y_n = r^n$ verifica la ecuación en diferencias (6), y por lo tanto debe ser

$$\max_{0 \le n \le N} |r^n| \le M_1 \max_{0 \le i \le k-1} |r^i|.$$

Esto ocurre solamante si $|r| \le 1$ (¿por qué?). Por otro lado, si r fuera raíz doble de $p(z)$, entonces la sucesión $\{y_n\}$ definida por $y_n = nr^n$ también sería una solución. Por lo tanto tendríamos

$$\max_{0 \le n \le N} |nr^n| \le M_1 \max_{0 \le i \le k-1} |ir^i|.$$

Esto ocurre solamente si $|r| < 1$ (¿por qué?).

Así demostramos que si (MM) es estable, entonces deben verificarse *a)* y *b)*. La demostración de la parte recíproca es más difícil y no la haremos aquí. □

Volviendo al ejemplo del método de Milne, para el cual tenemos $p(z) = z^2 - 1$, vemos que es estable, pues las raíces de p son 1 y -1, que son de módulo 1 y simples.

Como consecuencia de las Proposiciones 1 y 3 y del Teorema 1 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2 *Si el polinomio p verifica la condición de la raíz y si*

$$p(1) = 0 \qquad \text{y} \qquad p'(1) = q(1)$$

entonces (MM) es convergente.