

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO

Práctica N°5: Interpolación

1. Para cada uno de los conjuntos de datos dados, calcular el polinomio $p(x)$ interpolador de grado menor o igual que 3, en la forma de Lagrange. Verificar utilizando el comando **polyfit** de **Matlab**. Graficar el polinomio interpolador, usando el comando **polyval**.

x	-1	0	2	3
y	-1	3	11	27

x	-1	0	1	2
y	-3	1	1	3

2. Repetir el problema anterior, usando el método de coeficientes indeterminados.
3. Probar que el determinante de la matriz de Van del Monde es: $\prod_{n \geq i > j \geq 0} (x_i - x_j)$.
4. Sea $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$. Sea P_n un polinomio de grado n que interpola a f en $n + 1$ puntos distintos cualesquiera de dicho intervalo. Demostrar que para todo $x \in [0, 5]$,

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{32,5^{n+1}}{(n+1)!}$$

5. Sea f una función C^∞ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in [a, b]$ se tiene:

$$|f^k(x)| \leq C^k k!$$

Mostrar que, si $0 < C < \frac{1}{b-a}$ y P_n es un polinomio de grado n que interpola a f en $n + 1$ puntos distintos, entonces P_n converge a f uniformemente, es decir, $\|f - P_n\|_\infty \rightarrow 0$ cuando n tiende a ∞ .

6. Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{a+x}$. Sean $(x_n)_{n \geq 0}$ una sucesión arbitraria de puntos en $[-1, 1]$ y $P_n(x)$ el polinomio que interpola a $f(x)$ en x_0, x_1, \dots, x_n . Demostrar que si $a > 3$ entonces P_n converge a f uniformemente.
7.
 - a) Construir las tablas de diferencias divididas para los datos del Ejercicio 1, y emplearlas para construir los polinomios interpoladores.
 - b) Agregar a las tablas de datos del Ejercicio 1 el punto $x = 4$, $y = 1$. Aumentar las tablas de diferencias divididas y calcular los polinomios interpoladores.
8. Considerar la función $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ en el intervalo $[-1,1]$. Graficar f junto con los polinomios que resultan de interpolar a f en los $n + 1$ puntos equiespaciados $x_0 = -1, \dots, x_i = x_0 + \frac{2i}{n}, \dots, x_n = 1$; para $n = 5, 10, 15$. ¿Qué observa? Esta función se la conoce como la función de Runge.

9. Repetir el Ejercicio 8 para la función $f_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = |x|$ y para la función $f_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = \sin(\pi x)$.

10. Encontrar una función del tipo $2^{ax^3+bx^2+cx+d}$ que interpole la siguiente tabla de datos:

x	-1	0	1	2
y	1	1	0.5	4

11. Utilizando `Matlab`, encontrar y graficar una función del tipo $e^{a_4x^4+a_3x^3+\dots+a_0}$ que interpole a la función $f(x) = 1/x$ en 5 nodos equiespaciados en el intervalo $[1, 10]$.

12. a) Dado el intervalo $[a, b]$, sea m el punto medio entre a y b y sea $h \leq (b-a)/2$. Sea $p = m - h$ y $q = m + h$. Demostrar que para todo x en $[a, b]$,

$$|(x-p)(x-q)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

b) Sean $x_0 = a, \dots, x_i = x_0 + i\frac{b-a}{n}, \dots, x_n = b$, $n+1$ puntos equiespaciados en el intervalo $[a, b]$. Demostrar que para todo x en $[a, b]$,

$$|(x-x_0)\dots(x-x_n)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

13. Sea $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$. Sea P_n un polinomio de grado n que interpola a f en $n+1$ puntos equiespaciados en dicho intervalo.

a) Demostrar que para todo $x \in [-\pi, \pi]$

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$$

b) Concluir que P_n converge uniformemente a f .

14. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\pi x) + e^x$. Sea P_n el polinomio de grado n que interpola a f en $n+1$ puntos equiespaciados.

a) Usando el ejercicio 12, acotar el error $\|f - P_n\|_\infty$.

b) Sea C_n la cota hallada en (a). Para $n = 1, 3, 5$, graficar simultáneamente f , $f + C_n$, $f - C_n$ y P_n .

15. Dado un intervalo $[a, b]$, decidir como tienen que estar distribuidos $n+1$ nodos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ en el intervalo de modo que exista $x \in [a, b]$ tal que

$$|(x-x_0)\dots(x-x_n)| \sim (b-a)^{n+1}$$

16. a) Hallar n de modo que el polinomio P_n que interpola a la función $f(x) = e^{2x}$ en los ceros de T_{n+1} verifique que $\|f - P_n\|_\infty \leq 10^{-2}$ en $[-1, 1]$.

b) Repetir el ítem anterior para $f(x) = e^x$, $x \in [0, 4]$.

17. Para $n = 5, 10, 15$; graficar simultáneamente el polinomio $W_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, donde $x_i = -1 + 2i/n$; $i = 0, \dots, n$ y el polinomio de Tchebychev T_{n+1} .

18. Repetir los Ejercicios 8 y 9 usando los polinomios que interpolan a la función f en los ceros del polinomio de Tchebychev de grado $n+1$, para $n = 5, 10, 15$. ¿Qué diferencias observa respecto a los resultados en 8?

19. Utilizar el método de coeficientes indeterminados para hallar un polinomio p de grado 2 que satisfaga:

$$p(1) = 0, \quad p'(1) = 7, \quad p(2) = 10.$$

20. Para ilustrar qué pasa cuando se desea interpolar no sólo una función sino también sus derivadas, consideramos el problema de hallar p de grado a lo sumo 3 que verifique:

- (a) $p(0) = 1, \quad p'(0) = 1, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1;$
- (b) $p(-1) = 1, \quad p'(-1) = 1, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1;$
- (c) $p(-1) = 1, \quad p'(-1) = -6, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1.$

Usando el método de coeficientes indeterminados, demostrar que el problema (a) tiene solución única, el problema (b) no tiene solución, y el problema (c) tiene infinitas soluciones.

21. Analizar para qué valores de x_0, x_1, x_2 , y $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ existe un polinomio de grado 2 que satisfaga:

$$p(x_0) = \alpha_0, \quad p(x_1) = \alpha_1, \quad p'(x_2) = \alpha_2.$$

y cuándo este polinomio es único.

22. a) Sea $f(x) = \cos(\pi x)$, hallar un polinomio de grado menor o igual que 3 que verifique

$$p(-1) = f(-1), \quad p(0) = f(0), \quad p(1) = f(1), \quad p'(1) = f'(1).$$

- b) Hallar un polinomio de grado menor o igual que 4 que verifique las condiciones del ítem anterior, más la condición

$$p''(1) = f''(1).$$

23. Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = e^{2x-1}$ y sean $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ los ceros del polinomio de Tchebychev, T_{n+1} . Se interpola a f con un polinomio P de grado $\leq n+1$ de modo que $P(x_0) = f(x_0), P(x_1) = f(x_1), \dots, P(x_n) = f(x_n)$ y además $P'(x_n) = f'(x_n)$. Probar que si $n \geq 6$ entonces, el error cometido en la interpolación sobre el intervalo $[-1, 1]$ es menor que 10^{-3} .

24. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = e^{\frac{2x}{3}}$. Dados los nodos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ en $[0, 1]$, se quiere interpolar f con un polinomio de grado menor o igual a $n+2$ que cumpla que $P(x_i) = f(x_i)$ para todo $0 \leq i \leq n$ y, además, $P'(x_0) = f'(x_0)$ y $P'(x_n) = f'(x_n)$.

- a) Dar una cota para el error de interpolación $|f(x) - P(x)|$.

- b) Para $n = 4$, probar que si los nodos son equiespaciados se tiene que

$$\|f - P\|_\infty \leq e^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3^7 7!}.$$

- c) Si $n = 4$ y se sabe que la acotación para el error es,

$$\|f - P\|_\infty \leq e^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3^7 7! 2^2}.$$

¿Cómo fueron elegidos los nodos? Justificar.

25. Sea $f \in C^2[a, b]$, y sean $x_0 = a, x_1 = a + h, \dots, x_n = b$, donde $h = (b - a)/n$. Considerar la poligonal $l(x)$ que interpola a f en los puntos $x_i, i = 0 \dots n$.

- a) Probar que

$$|f(x) - l(x)| \leq \frac{h^2}{2} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

- b) Para los $x \in [a, b]$ tales que l es derivable, probar que

$$|f'(x) - l'(x)| \leq h \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$