Elementos de Cálculo Numérico

Práctica N°7: Integración numérica

1. Usar las fórmulas cerradas de Newton-Cotes de dos y tres puntos (reglas de trapecios y de Simpson, respectivamente) para calcular las integrales:

$$\int_0^1 x^4 \, dx \qquad \int_{0.1}^{0.2} \ln(x) \, dx \qquad \int_0^{.3} \frac{1}{1+x} \, dx$$

   Calcular, además, en forma exacta cada una de las integrales anteriores y verificar la cota del error.

2. Interpolando las funciones de base de Lagrange, hallar una fórmula de cuadratura por interpolación de la forma

$$\int_0^{2h} f(x) \, dx \sim A_0 f(0) + A_1 f(h).$$

3. Usar el método de coeficientes indeterminados para dar una fórmula de cuadratura por interpolación:

$$\int_0^{3h} f(x) \, dx \sim A_0 f(0) + A_1 f(h) + A_2 f(3h).$$

4. Construir la fórmula abierta de Newton-Cotes para calcular $\int_{-1}^{1} f(x) \, dx$ con nodos $-1/2,\ 0,\ 1/2$, y la fórmula cerrada de Newton-Cotes con nodos en los puntos $-1,\ -1/3,\ 1/3,\ 1$.

5. Considerar la función definida en $[-h, h]$ $(h > 0)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -h \leq x \leq 0 \\ x, & \text{si } \quad 0 < x \leq h. \end{cases}$$

   Hallar el error de la regla de trapecios aplicada a $f(x)$. ¿El orden es igual al obtenido para una función suficientemente suave?

6. La fórmula de cuadratura

$$\int_a^b f(x) \, dx \sim f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

   es conocida como *Regla de los Rectángulos*. Para $f \in C^1[a, b]$ acotar el error que se comete al utilizarla.

7. Para f una función C^2 probar que el error cometido al usar la fórmula de cuadratura del Ejercicio 2 no excede el valor $\dfrac{\|f''\|_\infty}{2} h^3$.

8. (a) Hallar una fórmula de cuadratura del tipo:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx \sim Af(-2) + Bf(0) + Cf(2).$$

   (b) Para $f \in C^3[-2,2]$ probar que el error cometido no excede el valor $\frac{7}{12}\|f^{(3)}\|_\infty$.

9. Escribir un programa que utilice las reglas de trapecios, de Simpson, de trapecios compuesta y de Simpson compuesta para calcular aproximaciones de la integral de una función $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$.

10. Se sabe que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ dx = \frac{\pi}{4}$.

   (a) Para $n = 1, \ldots, 100$, utilizar las reglas de trapecios y Simpson compuestas para aproximar numéricamente la integral y dar un valor cercano a π.

   (b) Graficar las sucesiones obtenidas junto con el valor de π que arroja `Matlab` y el valor que se obtiene al aplicar la rutina **quad** de `Matlab`.

11. (a) Calcular exactamente la integral

$$I = \int_0^{2\pi} [1 - \cos(32x)]\ dx.$$

   (b) Aproximar el valor de I usando el programa del Ejercicio 9 con los métodos de los trapecios, Simpson, trapecios compuesta y Simpson compuesta para $n = 2, 4, 8$ y 16.

   (c) Calcular el valor de I que produce la rutina **quad**.

12. Se quiere calcular $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\ dx$ utilizando la regla de trapecios compuesta, partiendo el intervalo $[-1,1]$ en n subintervalos. Hallar n de modo que el error sea menor que 10^{-3}.

13. La expresión $Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$ define una fórmula de cuadratura.

   (a) Probar que Q_n es lineal en f (el conjunto de funciones).

   (b) Supongamos que $Q_n(f) \sim \int_a^b f(x)w(x)\ dx$ y que es exacta para las funciones $1,\ x, \ldots,\ x^k$. Mostrar que la fórmula tiene grado de precisión por lo menos k.

14. Determinar el grado de precisión de las fórmulas para $\int_{-1}^{1} f(x)\ dx$:

   (a) $\frac{4}{3}f(-0.5) - \frac{2}{3}f(0) + \frac{4}{3}f(0.5)$.

   (b) $\frac{1}{4}f(-1) + \frac{3}{4}f(-\frac{1}{3}) + \frac{3}{4}f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{4}f(1)$.

15. Hallar reglas de cuadratura de grado de precisión máximo para aproximar $\int_{-3}^{3} f(x)\ dx$, de las siguientes formas:

   (a) $A[f(x_0) + f(x_1)]$ (repitiendo el coeficiente).

   (b) $Af(x_0) + Bf(x_0 + 4)$.

   y determinar cuáles son dichos grados.

16. Sea $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función estrictamente positiva. Demostrar que para todo conjunto de nodos $\{x_1, \dots, x_n\}$, coeficientes $A_1, \dots, A_n$, y para todo intervalo $[c,d]$; el grado de precisión de la forma de cuadratura

$$\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \sim \int_a^b f(x)w(x)dx$$

es el mismo que el de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} B_i f(y_i) \sim \int_c^d f(x)\tilde{w}(x)dx$$

donde $l : [a,b] \to [c,d]$ es la función lineal que transforma al intervalo $[a,b]$ en el intervalo $[c,d]$, $B_i = \frac{d-c}{b-a}A_i$, $y_i = l(x_i)$ y $\hat{w} : [c,d] \to \mathbb{R}$ está definida por $\hat{w}(x) = w(l^{-1}(x_i))$.

17. Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)x^2\, dx$ mediante una regla de cuadratura de la forma

$$\int_{-1}^{1} f(x)x^2\, dx \sim A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 3.

18. (a) Hallar una regla de cuadratura del siguiente tipo

$$\int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{|x|}dx \sim A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1).$$

que tenga grado de precisión máximo. ¿Cuál es dicho grado?

(b) Hallar una regla de cuadratura del siguiente tipo

$$\int_{0}^{4} f(x)\sqrt{\left|\frac{x-2}{2}\right|}dx \sim A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1).$$

que tenga grado de precisión máximo. ¿Cuál es dicho grado? Sugerencia: Usar el ejercicio 16.

19. Sea $w : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continua, par, $w > 0$, $\int_{-1}^{1} w(x)\, dx = 2$ y $\int_{-1}^{1} x^2 w(x)\, dx = 2/3$.

(a) Hallar x_0, x_1, A_0, A_1 tal que la formula de cuadratura

$$Q(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) \sim \int_{-1}^{1} f(x)w(x)\, dx$$

tenga grado de precisión máximo. ¿Cuál es dicho grado? Justifique.

(b) Hallar y_0, y_1, B_0, B_1 tal que la formula de cuadratura

$$Q(f) = B_0\, f(y_0) + B_1\, f(y_1) \sim \int_{0}^{1} f(x)w(2x-1)\, dx$$

tenga el mismo grado de precisión que la cuadratura del item anterior.

20. Sea w una función de peso. Se considera la regla de cuadratura de 1 punto:

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx \sim A_0 f(s).$$

(a) Probar que, cualquiera sea w, la fórmula tiene grado de precisión máximo si $s = \dfrac{\int_a^b xw(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}$.

(b) Probar que si $w(x) \equiv 1$, esta regla coincide con la regla de los rectángulos.

(c) Considerar el intervalo $[-1,1]$ y $w(x) = (x-1)^2$. Acotar el error que produce el uso de esta regla para funciones C^1.

21. Hallar los pesos y los nodos de las fórmulas de Gauss-Legendre de dos y tres puntos. (Los polinomios de Legendre mónicos de grado dos y tres son $x^2 - \frac{1}{3}$ y $x^3 - \frac{3}{5}x$).

22. Usar las fórmulas de Gauss-Legendre de tres puntos para estimar:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sin(3x)\,dx$, (b) $\displaystyle\int_{1}^{3} \ln(x)\,dx$, (c) $\displaystyle\int_{1}^{2} e^{x^2}\,dx$.

23. Probar que una fórmula de cuadratura

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx \sim Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$$

no puede tener grado de precisión mayor que $2n+1$, independientemente de la elección de los coeficientes (A_j) y de los nodos (x_j).

Sugerencia: Hallar un polinomio $p \in \mathbb{R}_{2n+2}[X]$ para el cual $Q_n(p) \neq \displaystyle\int_a^b p(x)w(x)\,dx$.

24. Para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua, se quiere dar una fórmula de cuadratura que aproxime $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ con $D \subset \mathbb{R}^2$ usando el Teorema de Fubini de la siguiente manera:

(a) Si $D = [0,1]\times[0,1]$, se define la función $F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x,y)\,dy$ y luego

- Se aproximan los valores $F(0), F(\frac{1}{2}), F(1)$ con la regla de Simpson.
- Se aproxima $\displaystyle\int_0^1 F(x)\ dx$ usando otra vez la misma regla.

Hallar explícitamente la regla que se obtiene. (Los nodos a considerar serán $\{(0,0), (\frac{1}{2},0), (1,0), (0,\frac{1}{2}), (\frac{1}{2},\frac{1}{2}), (1,\frac{1}{2}), (0,1), (\frac{1}{2},1), (1,1)\}$).

(b) Repetir el procedimiento y dar la fórmula correspondiente para D el triángulo de vértices $(0,0), (0,1), (1,0)$.

Sugerencia: considerar $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(x,y)\,dy$.

(c) Probar que si D es el triángulo de vértices $(0,0), (0,1), (1,0)$ la fórmula anterior es exacta para $f(x,y) = x^2 + y^2$.