1. Una variable aleatoria X tiene distribución $\Gamma(n,\lambda)$ si sus funciones de densidad y característica son

$$f_X(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \cdot x^{n-1} e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}(x) \quad y \quad \varphi_X(t) = \frac{\lambda^n}{(\lambda - it)^n}.$$

Probar que:

(a) $E(X) = n/\lambda$ y $V(X) = n/\lambda^2$.

(b) Si $a > 0$, entonces $aX \sim \Gamma(n, \lambda/a)$.

(c) Si $Y \sim \Gamma(m,\lambda)$ independiente de X, entonces $X + Y \sim \Gamma(n+m, \lambda)$.

2. (a) Si $Z \sim N(0,1)$, probar que $Z^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$.
(Nota: Usar que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.)

(b) La distribución $\Gamma(n/2, 1/2)$, para $n \in I\!N$, se denomina χ_n^2 (chi-cuadrado con n grados de libertad). Probar que si $Z_1, \ldots, Z_n$ son v.a. independientes con distribución $N(0,1)$, entonces $\sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi_n^2$.

3. Una variable aleatoria X tiene distribución $\beta(r,s)$ si su función de densidad es

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \cdot x^{r-1} (1-x)^{s-1} I_{[0,1]}(x).$$

Probar que:

(a) $E(X) = r/(r+s)$ y $V(X) = rs/\left[(r+s)^2 (r+s+1)\right]$.

(b) Analizar el caso en que $r = s = 1$.

4. Una variable aleatoria X tiene distribución $\mathcal{C}(0,1)$ si sus funciones de densidad y característica son

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \quad y \quad \varphi_X(t) = e^{-|t|}.$$

(a) Probar que X no tiene momentos finitos de ningún orden.

(b) Si $X_1, \ldots, X_n$ son independientes y tienen distribución $\mathcal{C}(0,1)$, mostrar que $\bar{X} \sim \mathcal{C}(0,1)$. ¿Vale la Ley de los Grandes Números?

5. (a) Sea X una v.a. con distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Encontrar la función característica de X.

(b) Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ independientes, demostrar que $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

(c) Probar que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y|X=x \sim Bi(x,p)$ entonces $Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.

6. Dadas X e Y v.a. independientes con distribución $N(0,1)$, se define $Z = X/|Y|$. Probar que $Z \sim \mathcal{C}(0,1)$.

   (Sugerencia: Usar esperanza condicional.)

7. Sea $X \sim N(\mu,\Sigma)$, $X \in I\!R^p$, con Σ simétrica y definida positiva.

   (a) Probar que $X_1,\ldots,X_p$ son independientes si y sólo si Σ es diagonal.

   (b) Si $A \in I\!R^{q\times p}$ e $Y = AX$, entonces $Y \sim N(A\mu, A\Sigma A')$.

8. Sean $\{X_n\}_{n\geq 1}$ e $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ sucesiones de variables aleatorias tales que $X_n \to X$ e $Y_n \to Y$ en probabilidad (o c.s., respectivamente). Probar que:

   (a) $X_n = O_p(1)$ en ambos casos. También, si $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, entonces $X_n = O_p(1)$.

   (b) Si $g : I\!R^2 \to I\!R$ es continua, entonces $g(X_n,Y_n) \to g(X,Y)$ en probabilidad o c.s., respectivamente.

9. (a) Sean $\{X_n\}_{n\geq 1}$ e $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ sucesiones de v.a. tales que $X_n = O_p(1)$ e $Y_n = o_p(1)$. Demostrar que $X_nY_n = o_p(1)$.

   (b) Probar que
   $$\sqrt{n}\,(X_n-\mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} \mu$$

   (c) Deducir la Ley Débil de los Grandes Números a partir del Teorema Central del Límite.

10. Sean $\{X_n\}_{n\geq 1}$ e $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ sucesiones de v.a. y a una constante tales que $X_n \xrightarrow{p} a$ e $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$. Probar que:

    (a) $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} a + Y$.

    (b) $X_nY_n \xrightarrow{\mathcal{D}} aY$.

11. Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de v.a. tales que
    $$\sqrt{n}\,(X_n-\mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0,\sigma^2\right).$$

    Sea $g : I\!R \to I\!R$ tal que g es derivable, g' es continua en μ y $g'(\mu) \neq 0$.

(a) Demostrar que

$$\sqrt{n}\left(g\left(X_n\right)-g\left(\mu\right)\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \sigma^2 g'\left(\mu\right)^2\right).$$

(b) ¿Cuál sería la distribución asintótica de

$$n\left(g\left(X_n\right)-g\left(\mu\right)\right)$$

si $g'\left(\mu\right)=0$ pero g'' es continua en μ y $g''\left(\mu\right)\neq 0$?