Consistencia y distribución asintótica.

1. (a) Sea δ_n un estimador con $V_\theta(\delta_n) < \infty$. Probar que si $\mathrm{ECM}_\theta(\delta_n) \to 0$, entonces δ_n es débilmente consistente.

   (b) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. tal que $E_\theta(X) = \theta$ y $V_\theta(X) < \infty$. Consideremos el siguiente estimador aleatorizado de θ :
$$\delta_n = (1 - \varepsilon_n)\bar{X} + \varepsilon_n n$$
   donde $\varepsilon_n \sim Bi(1, 1/n)$ y es independiente de las X_i. Probar que δ_n es débilmente consistente, aunque $\mathrm{ECM}_\theta(\delta_n) \to \infty$.

2. Sea Θ un espacio paramétrico finito y δ_n el EMV de θ. Probar que δ_n es débilmente consistente si y sólo si $P_\theta(\delta_n = \theta) \to 1 \ \forall \theta \in \Theta$.

3. (a) (eliminar) Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de v.a. tales que $X_n \xrightarrow{d} X$ es decir, converge en distribución o ley, que también se nota: $\mathcal{L}(X_n) \to \mathcal{L}(X)$. Si las varianzas de todas estas variables existen, probar que $\liminf V(X_n) \geq V(X)$.

   (b) Sea $X \sim \mathcal{U}(-1, 1)$ y definamos
$$X_n = \begin{cases} X & \text{si } |X| \leq 1 - 1/n \\ n & \text{si } |X| > 1 - 1/n \end{cases}$$
   Probar que $X_n \xrightarrow{d} X$ pero $V(X_n) \to \infty$.

4. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $F_0(x - \theta)$ con F_0 una función de densidad fija y $\theta \in I\!R$. Sea δ_n un estimador de θ equivariante por traslaciones (ie: para cualquier constante $c \in I\!R$ se verifica que $\delta_n(x_1 + c, \ldots, x_n + c) = \delta_n(x_1, \ldots, x_n) + c$). Mostrar que la varianza asintótica de δ_n (si existe) no depende de θ.

5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{E}(\theta)$. Probar que el EMV de θ es fuertemente consistente y asintóticamente eficiente.

6. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Consideremos $\delta_n = \bar{X}$ y
$$\delta_n^* = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$
   (a) Analizar si estos estimadores de λ son fuertemente consistentes.

   (b) Hallar sus distribuciones asintóticas. Decir si alguno de los dos es asintóticamente eficiente. (Nota: $E(X^4) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda$)

7. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. $N(\theta, 1)$ y sea

$$\delta_n = \begin{cases} \bar{X} & \text{si } |\bar{X}| \geq 1/n^{1/4} \\ a\bar{X} & \text{si } |\bar{X}| < 1/n^{1/4} \end{cases}$$

(a) Probar que $\sqrt{n}\,(\delta_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_\theta^2)$ con $\sigma_\theta^2 = 1$ $\forall \theta \neq 0$ y $\sigma_\theta^2 = a^2$ si $\theta = 0$. Luego si $|a| < 1$ $\theta = 0$ es un punto de supereficiencia.

(b) Consideremos el riesgo normalizado $R_n(\theta) = nE(\delta_n - \theta)^2$. Probar que $R_n(\theta) \to 1$ si $\theta \neq 0$ y $R_n(\theta) \to a^2$ si $\theta = 0$.

(c) Sea $b_n(\theta) = E_\theta(\delta_n) - \theta$ el sesgo de δ_n, mostrar que:

   i. $b_n(\theta) = \frac{-(1-a)}{\sqrt{n}} \int_{-n^{\frac{1}{4}}}^{n^{\frac{1}{4}}} x\phi(x - \sqrt{n}\theta)dx$

   ii. $b_n'(\theta) \to 0$ si $\theta \neq 0$ y $b_n'(0) \to -(1-a)$

   iii. Utilice (ii) para explicar porqué δ_n no verifica en $\theta = 0$ la desigualdad de Rao-Cramer sin violar la desigualdad de la información, esto es $var(\delta_n) \geq \dfrac{[\frac{\partial}{\partial\theta} E_\theta(\delta_n)]^2}{nI(\theta)}$.