

A) Intervalos de confianza para una muestra.

1. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población con distribución $N(\mu, \sigma_0^2)$ (σ_0^2 conocido). Supóngase que se pide un intervalo de confianza para μ de nivel $1 - \alpha$. Mostrar que al elegir $A = z_{\frac{\alpha}{2}}$ y $B = -z_{\frac{\alpha}{2}}$ se obtiene el intervalo de longitud mínima entre los contruidos considerando $A = z_\beta$ y $B = z_\delta$, con $\beta + \delta = \alpha$

2. Se trata de medir el período de un péndulo y se tiene un cronómetro de precisión conocida (es decir, se conoce la varianza del error). Se supone que las observaciones son de la forma $Y_i = \mu + \varepsilon_i$, donde los ε_i tienen distribución $N(0, 1/4)$ y son independientes. Los datos obtenidos son:

5.1 5.2 5.6 5.1 5.5 5.8 5.9 4.9 5.2 5.6

- (a) Encontrar un intervalo de confianza para μ de nivel 0.95.
- (b) ¿Cuál debería haber sido el tamaño de la muestra si se hubiera deseado que la longitud del intervalo fuese a lo sumo 0.10?

3. La distribución del índice de colesterol en cierta población es $N(\mu, \sigma^2)$. Se hacen análisis a 25 personas elegidas al azar entre esta población y se obtienen los siguientes valores:

1.52 1.65 1.72 1.65 1.72 1.83 1.62 1.75 1.72 1.68 1.51 1.65 1.58
 1.65 1.61 1.70 1.60 1.73 1.61 1.52 1.81 1.72 1.50 1.82 1.65

- (a) Encontrar un intervalo de confianza para μ de nivel 0.95.
- (b) ¿Cuántos datos adicionales deben obtenerse para poder construir un intervalo de confianza para μ de nivel 0.95 pero con una longitud no mayor que 0.05? ¿Qué forma tendría este intervalo?
- (c) Encontrar un intervalo de confianza para σ de nivel 0.90.
- (d) Encontrar un intervalo de confianza para $\exp(-\mu)$ de nivel 0.95.

4. (a) Probar que si X tiene distribución $\varepsilon(\lambda)$, entonces $Y = 2\lambda X$ tiene distribución χ_2^2 .
 (b) Sean X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población con distribución $\varepsilon(\lambda)$. Mostrar que $T = 2 \sum_{i=1}^n X_i$ tiene distribución χ_{2n}^2 .
 (c) En base a b) hallar un intervalo de confianza para λ de nivel $1 - \alpha$.
 (d) Se sabe que el tiempo de duración de cierto tipo de lámparas tiene distribución $\varepsilon(\lambda)$. Se han probado 20 lámparas y los tiempos de duración de los mismos en días fueron los siguientes

25 45 50 61 39 40 45 47 38 39
 54 60 39 46 39 50 42 50 62 50

Hallar un intervalo de confianza para λ de nivel 0.99.

5. Sean X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria con distribución $U [0, \theta]$ y sea $T = \max (X_1, \dots, X_n)$.
- (a) Mostrar que T/θ tiene distribución independiente de θ .
 - (b) Usando a) hallar un intervalo de confianza de longitud mínima para θ de nivel $1 - \alpha$.

B) Intervalos de confianza para dos muestras.

1. Se desea comparar los rendimientos de dos variedades de trigo A y B. Se han cultivado 15 parcelas elegidas al azar con la variedad A y 20 con la variedad B, obteniéndose los siguientes rendimientos por hectárea:

Var. A:	250	252	245	258	240	247	251	249	250	243	247	260	238	241	239
Var. B:	330	335	327	329	320	332	337	328	334	326	331	332	328	329	337
	341	336	338	325	321										

Se supone que los rendimientos de la variedad A tienen distribución $N(\mu_1, \sigma^2)$ y los de la otra variedad $N(\mu_2, \sigma^2)$, independientes entre sí.

- (a) Hallar un intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ de nivel 0.99.
 - (b) ¿Qué le sugeriría el hecho de que el 0 no pertenezca al intervalo hallado? ¿Qué pensaría en caso contrario?
 - (c) Hallar un intervalo de confianza para σ^2 de nivel 0.99.
 - (d) Hallar un intervalo de confianza para σ de nivel 0.90.
2. Sea X_1, \dots, X_{n_1} una m.a. de una distribución $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y sea Y_1, \dots, Y_{n_2} una m.a. de una distribución $N(\mu_2, \sigma_2^2)$; las muestras son independientes entre sí. Llamemos s_1^2 y s_2^2 a las varianzas muestrales respectivas.

- (a) Probar que

$$\frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} \sim \mathcal{F}_{n_1-1, n_2-1}.$$

- (b) Deducir un intervalo de confianza para σ_1^2/σ_2^2 de nivel $1 - \alpha$.
 - (c) ¿Que podría deducir si 1 no pertenece a este intervalo? ¿Y en caso contrario?
3. Se tienen dos variedades de trigo A y B. Se eligen al azar 15 parcelas, y cada una de ellas se divide en dos partes iguales. En una parte se cultiva la variedad A y en la otra la B. Se obtienen así 15 pares de datos:

Parcela:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Var. A:	41	37	36	39	44	42	38	37	35	32	39	30	40	41	37
Var. B:	39	35.3	33.5	36	42.5	38	36	34.8	33.2	29	29	36.6	28.4	38.5	39

Sea X_i el rendimiento de la variedad A en la parcela i e Y_i el rendimiento de la variedad B en la misma parcela. Se supone que (X_i, Y_i) , $1 \leq i \leq 15$, es una muestra de una distribución normal bivariada con parámetros desconocidos.

- (a) Hallar un intervalo de confianza para $\mu_X - \mu_Y$ de nivel 0.95.
- (b) Calcular para que valores de ρ conviene tomar muestras apareadas en lugar de muestras independientes.

C) Intervalos de confianza con nivel asintótico.

1. (a) Dada una muestra aleatoria de una distribución $Bi(1, p)$, construir un intervalo de confianza de nivel asintótico $1 - \alpha$ utilizando la distribución asintótica de \hat{p} debidamente estandarizado.
- (b) Una droga cura cierta enfermedad con probabilidad p . En una prueba con 100 enfermos, se curaron 30.
 - i. Hallar un intervalo de confianza para p de nivel asintótico 0.95.
 - ii. ¿Qué tamaño de muestra debería tomarse si se desea una longitud menor que 0.1?
2. (a) Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Hallar un intervalo de confianza para λ de nivel asintótico $1 - \alpha$ utilizando la distribución asintótica de \bar{X} debidamente estandarizado.
- (b) El número de llamadas diarias a una central telefónica sigue un proceso de Poisson con media λ . Se ha registrado el número de llamadas durante 20 días, obteniéndose los siguientes valores:

35 41 38 40 34 36 41 48 42 46
39 37 41 35 37 38 42 43 44 67

Hallar un intervalos de confianza para λ de nivel asintótico 0.90.

3. Sean $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria de una distribución normal bivariada $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ entonces si

$$\hat{\rho} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})\right)^2}{(n-1)^2 s_X^2 s_Y^2}$$

es un estimador de ρ^2 , entonces la variable aleatoria $\sqrt{n}(\hat{\rho} - \rho)$ converge en distribución a una normal $N(0, (1 - \rho^2)^2)$.

- (a) Usando que $\hat{\rho}$ es un estimador consistente, hallar un intervalo de confianza de nivel asintótico $1 - \alpha$ para ρ .

- (b) A cada uno de los estudiantes de muestra elegida la azar entre los alumnos que ingresan a cierta carrera, se le administró el test de Wechler para medir su habilidad mental y se registró la nota de su examen en cierta materia determinada. Los valores obtenidos son:

Wechler	100	87	134	95	111	106	90	117	121	107
Examen	49	47	78	50	66	49	40	80	65	55

Hallar un intervalo de confianza de nivel asintótico 0.95 para ρ , suponiendo que la muestra obtenida proviene de una distribución normal bivariada.

- (c) El intervalo de confianza para ρ obtenido en a) presenta la dificultad de que la convergencia de $\sqrt{n}(\hat{\rho} - \rho)$ a la distribución $N(0, (1 - \rho^2)^2)$ es lenta cuando ρ difiere considerablemente de cero. En esos casos es preferible usar la transformación

$$Z = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \hat{\rho}}{1 - \hat{\rho}} \right).$$

Se sabe que Z se distribuye en forma aproximadamente normal aún para valores moderados de n , con $E(Z)$ y $Var(Z)$ dadas por

$$E(Z) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right) + \frac{\rho}{2(n-1)}$$

$$Var(Z) = \frac{1}{(n-3)}$$

Considerando n suficientemente grande como para despreciar el término $\frac{\rho}{2(n-1)}$ hallar un intervalo de confianza de nivel asintótico $1 - \alpha$ para ρ .

4. (a) Supóngase que X_1, \dots, X_{n_1} es una m.a. de una distribución $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y que Y_1, \dots, Y_{n_2} es una m.a. de una distribución $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, independiente de la anterior. Mostrar que

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1)$$

cuando $n_1 \rightarrow \infty$ y $n_2 \rightarrow \infty$ de modo que $n_1/n_2 \rightarrow \lambda$ constante.

- (b) Hallar un intervalo de confianza de nivel asintótico $(1 - \alpha)$ para $\mu_1 - \mu_2$.