A) Tests de Neyman-Pearson para hipótesis simples.

1. Consideremos dos funciones de probabilidad puntual $P_0(x)$ y $P_1(x)$ dadas por la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4
P_0	0.05	0.00	0.05	0.90
P_1	0.00	0.05	0.90	0.05

Se observa una v.a. X y se quiere testear $H_0 : X \sim P_0$ vs $H_1 : X \sim P_1$.

   (a) Encontar los 4 tests no aleatorizados de nivel $\alpha = 0.05$ para este problema.
   (b) Entre estos 4 tests de nivel α, ¿cuál es el mejor?
   (c) Probar que el test hallado en el inciso anterior es el más potente de nivel α.
   (d) ¿Hay algún test no aleatorizado de nivel menor que α? ¿Qué potencia tiene?
   (e) Encontrar el test más potente de nivel $\alpha = 0.10$.

2. Demostrar que $\beta > \alpha$ para el test MP de nivel α. Interpretar.

3. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. que puede provenir de dos poblaciones: la hipótesis nula es que X_i tiene distribución $\mathcal{U}(0, 50)$ y la alternativa es que tiene densidad

$$f(x) = \frac{x}{1250} I_{[0,50]}(x).$$

Encontrar el test MP para este problema.

(*Sugerencia:* Analizar la distribución de $-\ln(X/50)$.)

4. Una empresa vende dos variedades de soja. La variedad 1 tiene un rendimiento por ha. que puede considerarse una variable aleatoria con distribución $N(37, 25)$, y la variedad 2 tiene un rendimiento por ha. que puede considerarse $N(40, 25)$. Un cliente realizó una compra de semillas de la variedad 2 y antes de continuar comprando a esta empresa, quiere asegurarse de que las semillas que le enviaron realmente pertenecen a esa variedad. Con ese fin, cultiva 10 parcelas de 1 ha. y obtiene los siguientes rendimientos:

37 39.5 41.7 42 40 41.25 43 44.05 38 38.5

El cliente quiere que la probabilidad de seguir comprando a esta empresa cuando las semillas no son de la variedad pedida sea 0.05.

   (a) Plantear el test MP para este problema. ¿Qué decisión se toma?
   (b) Hallar el valor p. ¿Se hubiera rechazado H_0 para $\alpha = 0.01$?
   (c) Calcular la probabilidad del error de tipo II.
   (d) Determinar el número n de parcelas a cultivar para que el error de tipo II tenga probabilidad menor o igual que 0.05.

B) Tests para familias con cociente de verosimilitud monótono.

1. (a) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $Bi\,(1, p)$. Encontrar el test UMP de nivel α para $H_0 : p \leq p_0$ vs $H_1 : p > p_0$.

   (b) Para curar cierta enfermedad se emplea actualmente un tratamiento que tiene un 40% de éxito. Un nuevo tratamiento es probado en 10 pacientes elegidos al azar y 9 de ellos se curan.

      i. Si se quiere que la probabilidad de adoptar el nuevo tratamiento cuando no es mejor que el actual sea 0.05, ¿qué decisión se toma?

      ii. Calcular el valor p.

      iii. ¿Cuál es la probabilidad de no cambiar de tratamiento si el nuevo en realidad tiene una probabilidad de éxito del 45%?

   (c) Seis estudiantes se pusieron a dieta para bajar de peso, con los siguientes resultados:

Nombre	Abdul	Ed	Jim	Max	Phil	Ray
Peso antes (X)	87	95	94	91	100	94
Peso después (Y)	83	93	91	89	102	90

   ¿Puede concluirse que esta dieta es efectiva? ¿Cuál es el valor p para estos datos?

   (Ayuda: La dieta es efectiva cuando $P\,(X > Y) > P\,(X \leq Y)$.)

2. (a) Dada $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $\mathcal{E}\,(\lambda)$, hallar el test UMP de nivel α para $H_0 : \lambda \geq \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda < \lambda_0$.

   (b) Se sabe que el tiempo de duración de cierto tipo de lamparitas sigue una distribución $\mathcal{E}\,(\lambda)$. La empresa garantiza que el tiempo medio de vida es mayor que 50 días y quiere asegurarse que la producción satisface este requerimiento antes de sacarla a la venta. Para ello toma una muestra de 10 lamparitas y observa un tiempo promedio de duración de 41 días.

      i. Si se quiere tener un 95% de seguridad de no vender cuando no se satisfacen los requerimientos, ¿qué decisión se toma en base a estos datos?

      ii. Acotar el valor p.

      iii. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar la producción a la venta si el tiempo medio de vida es de 57 días?

3. (a) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una población $N\,(\mu_0, \sigma^2)$ con μ_0 conocido. Encontrar el test UMP de nivel α para $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$.

   (b) Para medir la concentración de una sustancia en una solución se conoce un método cuyo error es una v.a. con distribución $N\,(0, 1)$. Se propone un nuevo método cuyo error también es normal con media cero pero varianza desconocida; se adoptará este nuevo método si es más preciso que el anterior. Se tomaron 21 mediciones y se obtuvo $\tilde{s}^2 = 0.60$.

      i. Se quiere que la probabilidad de cambiar de método si el nuevo en realidad es menos preciso sea a lo sumo del 1%. ¿Adoptaría o no el nuevo método?

      ii. Acotar el valor p.

      iii. Acotar la probabilidad de quedarse con el viejo método de medición cuando la varianza del nuevo es en realidad 0.80.

4. (a) Probar que la familia de densidades de la forma

$$p_\theta(x) = a(\theta)\, h(x)\, \mathrm{I}_{(-\infty,\theta)}(x)$$

tiene CVM en $X_{(n)}$.

(b) Si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a. de una distribución $\mathcal{U}(0,\theta)$, encontrar el test UMP de nivel α para $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$.