TEST IUMP

- Un test ϕ de nivel α para $H_0 : \ \theta \in \Theta_0$ versus $H_1 : \ \theta \in \Theta_1$, se dice insesgado si

$$\beta_\phi(\theta) \geq \alpha \qquad \forall\, \theta \in \Theta_1$$

TEST IUMP

- Un test ϕ de nivel α para $H_0 : \theta \in \Theta_0$ versus $H_1 : \theta \in \Theta_1$, se dice insesgado si

$$\beta_\phi(\theta) \geq \alpha \qquad \forall\, \theta \in \Theta_1$$

- ϕ es un test **IUMP de nivel α** si

  i) $\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_\phi(\theta) = \alpha$

TEST IUMP

- Un test ϕ de nivel α para $H_0 : \theta \in \Theta_0$ versus $H_1 : \theta \in \Theta_1$, se dice insesgado si

$$\beta_\phi(\theta) \geq \alpha \qquad \forall\, \theta \in \Theta_1$$

- ϕ es un test **IUMP de nivel α** si

  i) $\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_\phi(\theta) = \alpha$

  ii) ϕ es insesgado

TEST IUMP

- Un test ϕ de nivel α para $H_0 : \ \theta \in \Theta_0$ versus $H_1 : \ \theta \in \Theta_1$, se dice insesgado si

$$\beta_\phi(\theta) \geq \alpha \qquad \forall\, \theta \in \Theta_1$$

- ϕ es un test **IUMP de nivel α** si

  i) $\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} \beta_\phi(\theta) = \alpha$

  ii) ϕ es insesgado

  iii) para todo ϕ^* tal que $\begin{cases} \text{a)} & \sup\limits_{\theta \in \Theta_0} \beta_{\phi^*}(\theta) = \alpha \\ \text{b)} & \phi^* \text{ es insesgado} \end{cases}$

  se verifica

$$\beta_\phi(\theta) \geq \beta_{\phi^*}(\theta) \qquad \forall\, \theta \in \Theta_1$$

TEST IUMP: $H_0: \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad H_1: \theta > \theta_2$ ***o*** $\theta < \theta_1$

$$f(x,\theta) = A(\theta)\,\exp\{\theta\, x\} h(x)$$

Todo test bilateral

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < x_1 \quad \text{o} \quad x > x_2 \\ \gamma_i & \text{si } x = x_i \\ 0 & \text{si } x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

tal que (x_i, γ_i) se eligen de modo que $\beta_\phi(\theta_i) = \alpha$ es **IUMP de nivel** α para H_0 versus H_1.

TEST IUMP: $H_0: \ \theta = \theta_0 \quad H_1: \ \theta \neq \theta_0$

$$f(x,\theta) = A(\theta)\ \exp\{\theta\, x\} h(x)$$

Todo test bilateral

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < x_1 \quad \text{o} \quad x > x_2 \\ \gamma_i & \text{si } x = x_i \\ 0 & \text{si } x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

tal que (x_i, γ_i) se eligen de modo que

$$\beta_\phi(\theta_0) = \alpha \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial\theta}\beta_\phi(\theta)\Big|_{\theta=\theta_0} = 0$$

es **IUMP de nivel** α para H_0 versus H_1.

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear $H_0 : \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ versus $H_1 : \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$ $\ \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ versus $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$ $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$

- $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0$: Estimador de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$, suponiendo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear $H_0 : \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ versus $H_1 : \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$ $\ \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$

- $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0$: Estimador de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$, suponiendo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$

- $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1$: Estimador de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$, suponiendo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ versus $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$ $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$

- $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0$: Estimador de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$, suponiendo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$

- $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1$: Estimador de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$, suponiendo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0) &= \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \\ f(\mathbf{X}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1) &= \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear $H_0 : \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ versus $H_1 : \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \ \ \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$

$$L_{10} = \frac{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1)}{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)} \geq k_\alpha$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ versus $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$ $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$

$$L_{10} = \frac{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1)}{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)} \geq k_\alpha$$

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1) > k_\alpha \, f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0) \\ \gamma_\alpha & \text{si } f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1) = k_\alpha \, f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0) \\ 0 & \text{si } f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1) < k_\alpha \, f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0) \end{cases}$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ versus $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$ $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$

$$L(\mathbf{X}) = \frac{1}{L_{10}} = \frac{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)}{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1)} \leq k_\alpha$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear $H_0 : \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ versus $H_1 : \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \quad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$

$$L(\mathbf{X}) = \frac{1}{L_{10}} = \frac{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)}{f(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1)} \leq k_\alpha$$

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } L(\mathbf{X}) < k_\alpha \\ \gamma_\alpha & \text{si } L(\mathbf{X}) = k_\alpha \\ 0 & \text{si } L(\mathbf{X}) > k_\alpha \end{cases}$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ versus $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$ $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$

$$L(\mathbf{X}) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} f(\mathbf{x}, \theta)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta_1} f(\mathbf{x}, \theta)}$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ versus $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$ $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$

$$L(\mathbf{X}) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} f(\mathbf{x}, \theta)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta_1} f(\mathbf{x}, \theta)}$$

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } L(\mathbf{X}) < k_\alpha \\ \gamma_\alpha & \text{si } L(\mathbf{X}) = k_\alpha \\ 0 & \text{si } L(\mathbf{X}) > k_\alpha \end{cases}$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ versus $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$ $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$

Si

$$\sup_{\theta \in \Theta_1} f(\mathbf{x}, \theta) = \sup_{\theta \in \Theta} f(\mathbf{x}, \theta)$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear $H_0: \; \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ versus $H_1: \; \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 \;\; \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$

Si

$$\sup_{\theta \in \Theta_1} f(\mathbf{x}, \theta) = \sup_{\theta \in \Theta} f(\mathbf{x}, \theta)$$

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } L^*(\mathbf{X}) < k_\alpha \\ \gamma_\alpha & \text{si } L^*(\mathbf{X}) = k_\alpha \\ 0 & \text{si } L^*(\mathbf{X}) > k_\alpha \end{cases}$$

Test de Cociente de Máxima verosimilitud

$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ y se quiere testear $H_0 : \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ versus $H_1 : \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$ $\ \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$

Si

$$\sup_{\theta \in \Theta_1} f(\mathbf{x}, \theta) = \sup_{\theta \in \Theta} f(\mathbf{x}, \theta)$$

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } L^*(\mathbf{X}) < k_\alpha \\ \gamma_\alpha & \text{si } L^*(\mathbf{X}) = k_\alpha \\ 0 & \text{si } L^*(\mathbf{X}) > k_\alpha \end{cases}$$

$$L^*(\mathbf{X}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} f(\mathbf{x}, \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} f(\mathbf{x}, \theta)}$$

Distribución $\mathcal{T}_n(\Delta)$

- *Distribución de Student no central con n grados de libertad y parámetro de no centralidad Δ:* $\mathcal{T}_n(\Delta)$ es la distribución de

$$\frac{U+\Delta}{\sqrt{V/n}}$$

con $U \sim N(0,1)$, $V \sim \chi^2_n$ y además U y V son independientes.

Distribución $\mathcal{T}_n(\Delta)$

- *Distribución de Student no central con n grados de libertad y parámetro de no centralidad Δ:* $\mathcal{T}_n(\Delta)$ es la distribución de
$$\frac{U+\Delta}{\sqrt{V/n}}$$
con $U \sim N(0,1)$, $V \sim \chi^2_n$ y además U y V son independientes.

- Sea $X_\Delta \sim \mathcal{T}_n(\Delta)$,
$$c_{n,k}(\Delta) = P(X \geq k),$$
$\Longrightarrow c_{n,k}(\Delta)$ es una función monótona creciente de Δ.

Test de CMV para $H_0 : \mu \leq \mu_0$ *versus* $H_1 : \mu \leq \mu_0$

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, (μ, σ^2) desconocidos.
- $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$.

Test de CMV para $H_0 : \mu \leq \mu_0$ versus $H_1 : \mu \leq \mu_0$

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, (μ, σ^2) desconocidos.
- $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$.

El test de cociente de máxima verosimilitud es

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{s} \geq t_{n-1,\alpha} \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{s} < t_{n-1,\alpha} \end{cases}$$

Test de CMV para $H_0 : \mu \leq \mu_0$ versus $H_1 : \mu \leq \mu_0$

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, (μ, σ^2) desconocidos.
- $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$.

El test de cociente de máxima verosimilitud es

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{s} \geq t_{n-1,\alpha} \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{s} < t_{n-1,\alpha} \end{cases}$$

cumple

$$\beta_\phi(\mu_0, \sigma) = \alpha \qquad \forall\ \sigma$$

Test de CMV para $H_0 : \mu \leq \mu_0$ ***versus*** $H_1 : \mu \leq \mu_0$

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, (μ, σ^2) desconocidos.

El test de cociente de máxima verosimilitud es

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{s} \geq t_{n-1,\alpha} \\ \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}\frac{(\overline{X}-\mu_0)}{s} < t_{n-1,\alpha} \end{cases}$$

Sea $\Delta = \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma$,

$$\boldsymbol{\beta_\phi(\mu, \sigma^2) = P_{\mu,\sigma^2}(T \geq t_{n-1,\alpha}) = c_{n-1,t_{n-1,\alpha}}(\Delta)} \; .$$

$$\sup_{\substack{\mu \leq \mu_0 \\ \sigma > 0}} \beta_\phi(\mu, \sigma^2) = \beta_\phi(\mu_0, 1)$$

Test con nivel asintótico

- $X_1, \ldots, X_n$ m.a. $X_i \sim F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$

- $H_0 : \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ contra $H_1 : \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$.

Se dirá que una sucesión de test $\phi_n(X_1, \ldots, X_n)$ tiene nivel de significación asintótico α si

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \beta_{\phi_n}(\boldsymbol{\theta}) = \alpha$$

Distribución asintótica del test de CMV

- $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ con $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \Theta \subset I\!R^p$ que contiene una esfera.

- Θ_0 es un conjunto de dimensión $p - j$, $1 \leq j \leq p$.

- $H_0 : \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ versus $H_1 : \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$, con $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$.

$$L^*(\mathbf{X}) = \frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} \ .$$

Bajo condiciones de regularidad generales en $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $-2 \ln L^*(\mathbf{X}) \xrightarrow{D} \chi^2_j$ cuando $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$.

Distribución asintótica del test de CMV

$\Longrightarrow$ Un test de nivel de significación asintótico α está dado por

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -2\ln L^*(\mathbf{X}) \geq \chi^2_{j,\alpha} \\ \\ 0 & \text{si} \quad -2\ln L^*(\mathbf{X}) < \chi^2_{j,\alpha} \end{cases}$$

Distribución asintótica del test de CMV

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $X_1 \sim f(x, \theta)$ con $\theta \in \Theta$ y Θ un abierto en $\mathbb{R}$. Sea $f(\mathbf{x}, \theta)$ la densidad conjunta de $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$.

Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones

(A) *El conjunto $\mathcal{S} = \{x : f(x, \theta) > 0\}$ es independiente de θ.*

(B) *Para todo $x \in \mathcal{S}$, $f(x, \theta)$ tiene derivada tercera respecto de θ continua y tal que*

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^3 \ln f(x, \theta)}{\partial \theta^3} \right| &= \left| \frac{\partial^2 \psi(x, \theta)}{\partial \theta^2} \right| \leq K \quad \forall\, x \in \mathcal{S} \quad \forall\, \theta \in \Theta \\
\psi(x, \theta) &= \frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta} \,.
\end{aligned}
$$

Distribución asintótica del test de CMV

(C) *Si* $h(\mathbf{X})$ *es un estadístico tal que* $E_\theta[|h(\mathbf{X})|] < \infty,\ \forall\ \theta \in \Theta$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{x})f(\mathbf{x},\theta)d\mathbf{x}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{x})\frac{\partial f(\mathbf{x},\theta)}{\partial\theta}d\mathbf{x}$$

(D) $0 < I_1(\theta) = E_\theta\left[\left(\frac{\partial \ln f(X_1,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] < \infty\ .$

Sea $\widehat{\theta}_n$ *un EMV de* θ *consistente,*

$$L^*(\mathbf{X}) \quad = \quad \frac{f(\mathbf{X},\theta_0)}{\sup_{\theta\in\Theta} f(\mathbf{X},\theta)} = \frac{f(\mathbf{X},\theta_0)}{f(\mathbf{X},\widehat{\theta}_n)}\ .$$

$$\Longrightarrow \qquad U = -2\ln\left(L^*(\mathbf{X})\right) \xrightarrow{D} \chi^2_1$$

Distribución asintótica del test de CMV

El test

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad U \geq \chi^2_{1,\alpha} \\ \\ 0 & \text{si} \quad U < \chi^2_{1,\alpha} \end{cases}$$

tiene nivel de significación asintótico α.

$$U = -2\ln\left(L^*(\mathbf{X})\right)$$

Test IUMP para familias exponenciales a p parámetros

- $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \sim f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ con
  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$

- $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = A(\boldsymbol{\theta}) \exp\left\{ \sum_{j=1}^{p} \theta_j T_j(\mathbf{x}) \right\} \widetilde{h}(\mathbf{x})$

$$\boxed{f_{\mathbf{T}}(\mathbf{t}, \boldsymbol{\theta}) = A(\boldsymbol{\theta}) \exp\left\{ \sum_{j=1}^{p} \theta_j \, t_j \right\} h(\mathbf{t})}$$

- $H_0 : \; \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ versus $H_1 : \; \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$, con $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$.

Test IUMP para familias exponenciales a p parámetros

- Un test ϕ se dice $\alpha-$***similar*** en un conjunto Θ_B si $\beta(\theta) = \alpha \quad \forall\, \theta \in \Theta_B$
- Un test ϕ se dice ***similar*** en Θ_B si existe α tal que ϕ es $\alpha-$similar en Θ_B
- Un test ϕ se dice **UMP** $\alpha-$**similar** para

$$\boldsymbol{H_0: \ \theta \in \Theta_0} \quad \text{versus} \quad \boldsymbol{H_1: \ \theta \in \Theta_1} \text{ si}$$

i) ϕ es $\alpha-$***similar*** en $\Theta_B = \overline{\Theta_0} \cap \overline{\Theta_1}$

ii) Dado ϕ^* $\alpha-$***similar*** en Θ_B se tiene

$$\beta_\phi(\theta) \geq \beta_{\phi^*}(\theta) \quad \forall\, \theta \in \Theta_1$$

Test IUMP para familias exponenciales a p parámetros

Teorema. *Consideremos el problema*

$$\boldsymbol{H_0} : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta_0} \quad \text{versus} \quad \boldsymbol{H_1} : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta_1}$$

Si

- *para cada test ϕ la función de potencia $\beta_\phi(\boldsymbol{\theta})$ es continua en $\boldsymbol{\theta}$*
- ϕ_0 *es* **UMP** $\alpha-$**similar** para $\boldsymbol{H_0}$ versus $\boldsymbol{H_1}$
- ϕ_0 tiene **nivel** α para $\boldsymbol{H_0}$ versus $\boldsymbol{H_1}$

entonces ϕ_0 *es* **IUMP**.

Test IUMP para familias exponenciales a p parámetros

- Sea T suficiente para $\theta \in \Theta_B$. Un test ϕ UMP $\alpha-$similar en Θ_B se dice que tiene **estructura de Neymann** si

$$E\left(\phi(\mathbf{X})\Big|T=t\right)=\alpha \quad \forall t\notin \mathcal{N} \quad P_{\boldsymbol{\theta}}\left(\mathcal{N}\right)=0 \quad \forall \theta \in \Theta_B$$

- Si T es un estadístico suficiente acotadamente completo para $\theta \in \Theta_B$, entonces todo test $\alpha-$similar en Θ_B tiene **estructura de Neymann**.

Test IUMP para familias exponenciales a p parámetros: Hipótesis unilaterales

- $f_{\mathbf{T}}(\mathbf{t}, \boldsymbol{\theta}) = A(\boldsymbol{\theta}) \exp\left\{ \sum_{j=1}^{p} \theta_j \, t_j \right\} h(\mathbf{t})$
- $\boldsymbol{H_0 : \ \theta_1 \leq \theta_1^0}$ versus $\boldsymbol{H_1 : \ \theta_1 > \theta_1^0}$
- $\mathbf{T}^* = (T_2, \ldots, T_p)$ es suficiente para $\boldsymbol{\theta}^* = (\theta_2, \ldots, \theta_p)$ y

$$f_{T_1|\mathbf{T}^*=\mathbf{t}^*}(t_1, \theta_1) = c(\theta_1) e^{\theta_1 \, t_1} \, h^*(t_1)$$

Test IUMP para familias exponenciales a p parámetros: Hipótesis unilaterales

- Consideremos el test condicional

$$\phi(T_1, \mathbf{t}^*) = \begin{cases} 1 & \text{si } T_1 > k_\alpha(\mathbf{t}^*) \\ \gamma_\alpha(\mathbf{t}^*) & \text{si } T_1 = k_\alpha(\mathbf{t}^*) \\ 0 & \text{si } T_1 < k_\alpha(\mathbf{t}^*) \end{cases} \tag{12}$$

donde las funciones $k_\alpha(\mathbf{t}^*)$ y $\gamma_\alpha(\mathbf{t}^*)$ satisfacen

$$E_{\theta_1^0}\left(\phi(\mathbf{T}) \middle| \mathbf{T}^* = \mathbf{t}^*\right) = \alpha \ .$$

- Si ϕ es medible, se tiene

  a) ϕ es un test de nivel α para $\boldsymbol{H_0 : \ \theta_1 \leq \theta_1^0}$ vs $\boldsymbol{H_1 : \ \theta_1 > \theta_1^0}$

  b) ϕ es el test **IUMP** de nivel α.

Test IUMP para familias exponenciales a p parámetros: Hipótesis bilaterales

$$\phi(T_1, \mathbf{t}^*) = \begin{cases} 1 & \text{si } T_1 < k_{1,\alpha}(\mathbf{t}^*) \text{ o } T_1 > k_{2,\alpha}(\mathbf{t}^*) \\ \gamma_{i,\alpha}(\mathbf{t}^*) & \text{si } T_1 = k_{i,\alpha}(\mathbf{t}^*) \quad i = 1,2 \\ 0 & \text{si } k_{1,\alpha}(\mathbf{t}^*) < T_1 < k_{2,\alpha}(\mathbf{t}^*) \end{cases}$$

donde las funciones $k_\alpha(\mathbf{t}^*)$ y $\gamma_\alpha(\mathbf{t}^*)$ satisfacen

$$E_{\theta_1^1}(\phi(\mathbf{T})|\mathbf{T}^* = \mathbf{t}^*) = E_{\theta_1^2}(\phi(\mathbf{T})|\mathbf{T}^* = \mathbf{t}^*) = \alpha\ .$$

- Si ϕ es medible, se tiene

  a) ϕ es un test de nivel α para

  $\boldsymbol{H_0: \theta_1^1 \leq \theta_1 \leq \theta_1^2}$ vs $\boldsymbol{H_1: \theta_1 < \theta_1^1 \quad \text{o} \quad \theta_1 > \theta_1^2}$

  b) ϕ es el test **IUMP** de nivel α.

Test IUMP para familias exponenciales a p parámetros: Hipótesis bilaterales

$$\phi(T_1, \mathbf{t}^*) = \begin{cases} 1 & \text{si } T_1 < k_{1,\alpha}(\mathbf{t}^*) \text{ o } T_1 > k_{2,\alpha}(\mathbf{t}^*) \\ \gamma_{i,\alpha}(\mathbf{t}^*) & \text{si } T_1 = k_{i,\alpha}(\mathbf{t}^*) \quad i = 1, 2 \\ 0 & \text{si } k_{1,\alpha}(\mathbf{t}^*) < T_1 < k_{2,\alpha}(\mathbf{t}^*) \end{cases}$$

donde las funciones $k_\alpha(\mathbf{t}^*)$ y $\gamma_\alpha(\mathbf{t}^*)$ satisfacen

$$E_{\theta_1^0}(\phi(\mathbf{T})|\mathbf{T}^* = \mathbf{t}^*) = \alpha \quad E_{\theta_1^0}\left[(\phi(\mathbf{T}) - \alpha)\, T_1 | \mathbf{T}^* = \mathbf{t}^*\right] = 0.$$

- Si ϕ es medible, se tiene

  a) ϕ es un test de nivel α para $\boldsymbol{H_0 : \theta_1 = \theta_1^0}$ vs $\boldsymbol{H_1 : \theta_1 \neq \theta_1^0}$

  b) ϕ es el test **IUMP** de nivel α.

Relación entre test y Regiones de confianza

- $\mathbf{X} \sim F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$.
  Para cada $\boldsymbol{\theta}_0$ fijo sea $\phi_{\boldsymbol{\theta}_0}$, un test no aleatorizado de nivel α, para
  $$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0 .$$
- $\mathcal{A}(\boldsymbol{\theta}_0)$ Región de aceptación de $\phi_{\boldsymbol{\theta}_0}$
- $S(\mathbf{X}) = \{\boldsymbol{\theta} : \phi_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}) = 0\} = \{\boldsymbol{\theta} : \mathbf{X} \in \mathcal{A}(\boldsymbol{\theta})\}$
  $\Longrightarrow S(\mathbf{X})$ es una región de confianza de nivel $1 - \alpha$ para $\boldsymbol{\theta}$
- Recíprocamente, si $S(\mathbf{X})$ es una región de confianza de nivel $1 - \alpha$ para $\boldsymbol{\theta}$, el test
  $$\phi_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \boldsymbol{\theta}_0 \notin S(\mathbf{X}) \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{\theta}_0 \in S(\mathbf{X}) \, . \end{cases}$$
  es un test de nivel de α para testear
  $$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0 .$$