

## Repaso de probabilidades

1. Una variable aleatoria  $X$  tiene distribución  $\Gamma(n, \lambda)$  si sus funciones de densidad y característica son

$$f_X(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \cdot x^{n-1} e^{-\lambda x} I_{[0, \infty)}(x) \quad \text{y} \quad \varphi_X(t) = \frac{\lambda^n}{(\lambda - it)^n}.$$

Probar que:

- (a)  $E(X) = n/\lambda$  y  $V(X) = n/\lambda^2$ .  
 (b) Si  $a > 0$ , entonces  $aX \sim \Gamma(n, \lambda/a)$ .  
 (c) Si  $Y \sim \Gamma(m, \lambda)$  independiente de  $X$ , entonces  $X + Y \sim \Gamma(n + m, \lambda)$ .
2. (a) Si  $Z \sim N(0, 1)$ , probar que  $Z^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$ .  
 (NOTA: Usar que  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .)  
 (b) La distribución  $\Gamma(n/2, 1/2)$ , para  $n \in \mathbb{N}$ , se denomina  $\chi_n^2$  (chi-cuadrado con  $n$  grados de libertad). Probar que si  $Z_1, \dots, Z_n$  son v.a. independientes con distribución  $N(0, 1)$ , entonces  $\sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi_n^2$ .

3. Una variable aleatoria  $X$  tiene distribución  $\beta(r, s)$  si su función de densidad es

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \cdot x^{r-1} (1-x)^{s-1} I_{[0,1]}(x).$$

Probar que:

- (a)  $E(X) = r/(r+s)$  y  $V(X) = rs/[(r+s)^2(r+s+1)]$ .  
 (b) Analizar el caso en que  $r = s = 1$ .
4. Una variable aleatoria  $X$  tiene distribución  $\mathcal{C}(0, 1)$  si sus funciones de densidad y característica son

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \quad \text{y} \quad \varphi_X(t) = e^{-|t|}.$$

- (a) Probar que  $X$  no tiene momentos finitos de ningún orden.  
 (b) Si  $X_1, \dots, X_n$  son independientes y tienen distribución  $\mathcal{C}(0, 1)$ , mostrar que  $\bar{X} \sim \mathcal{C}(0, 1)$ . ¿Vale la Ley de los Grandes Números?
5. (a) Sea  $X$  una v.a. con distribución  $\mathcal{P}(\lambda)$ . Encontrar la función característica de  $X$ .  
 (b) Si  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  e  $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$  independientes, demostrar que  $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ .  
 (c) Probar que si  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  e  $Y|X = x \sim Bi(x, p)$  entonces  $Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$ .
6. Dadas  $X$  e  $Y$  v.a. independientes con distribución  $N(0, 1)$ , se define  $Z = X/|Y|$ . Probar que  $Z \sim \mathcal{C}(0, 1)$ .

(SUGERENCIA: Usar esperanza condicional.)

7. Sea  $X \sim N(\mu, \Sigma)$ ,  $X \in \mathbb{R}^p$ , con  $\Sigma$  simétrica y definida positiva.

- (a) Probar que  $X_1, \dots, X_p$  son independientes si y sólo si  $\Sigma$  es diagonal.
- (b) Si  $A \in \mathbb{R}^{q \times p}$  e  $Y = AX$ , entonces  $Y \sim N(A\mu, A\Sigma A')$ .

8. Sean  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  e  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$  sucesiones de variables aleatorias tales que  $X_n \rightarrow X$  e  $Y_n \rightarrow Y$  en probabilidad (o c.s., respectivamente). Probar que:

- (a)  $X_n = O_p(1)$  en ambos casos. También, si  $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ , entonces  $X_n = O_p(1)$ .
- (b) Si  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces  $g(X_n, Y_n) \rightarrow g(X, Y)$  en probabilidad o c.s., respectivamente.

9. (a) Sean  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  e  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$  sucesiones de v.a. tales que  $X_n = O_p(1)$  e  $Y_n = o_p(1)$ . Demostrar que  $X_n Y_n = o_p(1)$ .

(b) Probar que

$$\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} \mu$$

(c) Deducir la Ley Débil de los Grandes Números a partir del Teorema Central del Límite.

10. Sean  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  e  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$  sucesiones de v.a. y  $a$  una constante tales que  $X_n \xrightarrow{p} a$  e  $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$ . Probar que:

- (a)  $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} a + Y$ .
- (b)  $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} aY$ .

11. Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de v.a. tales que

$$\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2).$$

Sea  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g$  es derivable,  $g'$  es continua en  $\mu$  y  $g'(\mu) \neq 0$ .

(a) Demostrar que

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\mu)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2 g'(\mu)^2).$$

(b) ¿Cuál sería la distribución asintótica de

$$n(g(X_n) - g(\mu))$$

si  $g'(\mu) = 0$  pero  $g''$  es continua en  $\mu$  y  $g''(\mu) \neq 0$ ?