

Chapter 5

Intervalos y Regiones de Confianza

5.1 Regiones de confianza – Definición y Ejemplos

Consideremos nuevamente el problema de estimación. Dado un vector \mathbf{X} con distribución perteneciente a la familia $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ con $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, un estimador puntual de $\boldsymbol{\theta}$ es una función $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \delta(\mathbf{X})$ que representa un *único* valor que aproxima a $\boldsymbol{\theta}$. Si se da solamente ese valor no se tendrá ninguna idea de la precisión de dicha aproximación, es decir de las posibles diferencias entre $\boldsymbol{\theta}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Una forma de obtener información sobre la precisión de la estimación, en el caso de que $\boldsymbol{\theta}$ sea unidimensional, es proporcionar un intervalo $[a(\mathbf{X}), b(\mathbf{X})]$ de manera que la probabilidad de que dicho intervalo contenga el verdadero valor $\boldsymbol{\theta}$ sea alta, por ejemplo, 0.95.

En este caso, la precisión con que se conoce $\boldsymbol{\theta}$ depende de la longitud del intervalo, es decir, de $b(\mathbf{X}) - a(\mathbf{X})$, cuanto más pequeña sea esa longitud, más determinado quedará $\boldsymbol{\theta}$.

Si $\boldsymbol{\theta}$ es un vector de \mathbb{R}^p , en vez de dar un intervalo para estimarlo, se deberá dar una cierta región de \mathbb{R}^p , por ejemplo, esférica o rectangular.

La siguiente definición formaliza estos conceptos.

Definición 1: Dado un vector \mathbf{X} con distribución perteneciente a la familia $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ con $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, una *región de confianza* $S(\mathbf{X})$ para $\boldsymbol{\theta}$ con nivel de confianza $1 - \alpha$ será una función que a cada \mathbf{X} le hace corresponder un subconjunto de Θ de manera que $P_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta} \in S(\mathbf{X})) = 1 - \alpha$ para todo $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$.

Es decir, $S(\mathbf{X})$ cubre el valor verdadero del parámetro con probabilidad

$1 - \alpha$. El valor de α debe ser fijado de acuerdo al grado de seguridad con que se quiere conocer θ ; generalmente se toma $\alpha = 0.05$ ó $\alpha = 0.01$.

Como caso particular, cuando θ sea unidimensional se dirá que $S(\mathbf{X})$ es un intervalo de confianza si $S(\mathbf{X})$ es de la forma

$$S(\mathbf{X}) = [a(\mathbf{X}), b(\mathbf{X})]$$

La longitud de $S(\mathbf{X})$

$$L = b(\mathbf{X}) - a(\mathbf{X})$$

dependerá del nivel α elegido, cuanto más chico sea α , o sea, cuanto más grande sea la probabilidad con que el intervalo cubra al verdadero valor del parámetro, más grande será la longitud de aquél, o sea, menos precisa la estimación de θ .

Ejemplo 1: Sea X_1, \dots, X_n una muestra de una población con distribución $N(\mu, \sigma_0^2)$ donde μ es desconocido y σ_0^2 conocido. Supongamos que se necesite un intervalo de confianza para μ de nivel $1 - \alpha$.

Consideremos $\bar{X}_n = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i$. Sabemos que \bar{X}_n tiene distribución $N(\mu, \sigma_0^2/n)$. Luego $V = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma_0$, tendrá distribución $N(0, 1)$. La ventaja de la variable aleatoria V sobre \bar{X}_n es que tiene distribución independiente de μ .

Definimos z_α tal que $P(V \geq z_\alpha) = \alpha$; y por simetría $P(V \leq -z_\alpha) = \alpha$. Luego

$$\begin{aligned} P(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq V \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) &= 1 - P(V \leq -z_{\frac{\alpha}{2}}) - P(V \geq z_{\frac{\alpha}{2}}) \\ &= 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Si reemplazamos V por $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma_0$ se tendrá

$$P_\mu \left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma_0} \right) \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha,$$

con lo cual, despejando resulta

$$P_\mu \left(\bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha.$$

Por lo tanto, un intervalo de confianza para μ de nivel $1 - \alpha$ será

$$S(\mathbf{X}) = \left[\bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right]$$

ya que

$$P_\mu[\mu \in S(\mathbf{X})] = 1 - \alpha.$$

Conviene precisar nuevamente el significado de esta igualdad. Para fijar ideas, supongamos $\alpha = 0.05$. La expresión “ $S(\mathbf{X})$ cubre a μ con probabilidad 0.95”, indica que si un experimentador extrayese un número suficientemente grande de muestras \mathbf{X} de tamaño n de una distribución $N(\mu, \sigma_0^2)$ y construyese las regiones $S(\mathbf{X})$ correspondientes a cada una de ellas, aproximadamente el 95% de estas regiones $S(\mathbf{X})$ contendrán el parámetro μ . Esto es, dada \mathbf{X} , la afirmación “ $S(\mathbf{X})$ cubre a μ ” tiene probabilidad 0.95 de ser correcta y probabilidad 0.05 de ser falsa.

Ejemplo 2: Un físico hace 16 mediciones de cierta magnitud (a determinar), dichas mediciones X_i serán $X_i = \mu + \epsilon_i$ donde ϵ_i son los errores de medición.

Supongamos que los ϵ_i son variables aleatorias independientes con distribución $N(0, 4)$ (dato que se conoce por experimentos anteriores).

Supongamos que el promedio de las 16 observaciones obtenidas es $\bar{X}_{16} = 20$ y consideremos el problema de encontrar un intervalo de confianza para μ con nivel 0.95; luego $\alpha = 0.05$ y de las tablas normales se obtiene $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$.

Luego el intervalo de confianza será:

$$\left[20 - \frac{1.96\sqrt{4}}{\sqrt{16}}, \quad 20 + \frac{1.96\sqrt{4}}{\sqrt{16}} \right] = [19.02, 20.98],$$

y su longitud es 1.96.

Supongamos ahora que se quiere conocer cuál deberá ser el número de observaciones para que el intervalo sea de longitud 0.1. Entonces

$$0.1 = 1.96 \frac{2}{\sqrt{n}} \quad \text{o sea} \quad \sqrt{n} = 1.96 \frac{2}{0.1} = 39.2$$

de donde, $n = (39.2)^2 = 1536.64$. Por lo tanto, se necesitan 1537 observaciones para obtener un intervalo con la longitud deseada.

5.2 Procedimientos generales para obtener regiones de confianza

Teorema 1: Sea \mathbf{X} un vector aleatorio cuya distribución pertenece a la familia $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, y sea $U = G(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})$ una variable aleatoria cuya

distribución es independiente de θ . Sean A y B tales que $P(A \leq U \leq B) = 1 - \alpha$. Luego, si se define $S(\mathbf{X}) = \{\theta : A \leq G(\mathbf{X}, \theta) \leq B\}$, se tiene que $S(\mathbf{X})$ es una región de confianza a nivel $(1 - \alpha)$ para θ .

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned} P_{\theta}(\theta \in S(\mathbf{X})) &= P_{\theta}(A \leq G(\mathbf{X}, \theta) \leq B) = \\ &= P_{\theta}(A \leq U \leq B) = P(A \leq U \leq B) = 1 - \alpha \end{aligned}$$

la penúltima igualdad es válida pues la distribución de U es independiente de θ .

Cabe preguntarse bajo qué condiciones $S(\mathbf{X})$ es un intervalo, en el caso en que θ es unidimensional. Notemos que, en ese caso, si $G(\mathbf{X}, \theta)$ es monótona como función de θ , para cada valor de \mathbf{X} dado, entonces

$$h_{\mathbf{X}}(\theta) = G(\mathbf{X}, \theta)$$

tiene inversa.

Supongamos $h_{\mathbf{X}}(\theta)$ creciente, resulta entonces

$$S(\mathbf{X}) = \{\theta : h_{\mathbf{X}}^{-1}(A) \leq \theta \leq h_{\mathbf{X}}^{-1}(B)\}$$

es decir, $S(\mathbf{X})$ es un intervalo.

Si $h_{\mathbf{X}}(\theta)$ es decreciente, resultará en forma análoga,

$$S(\mathbf{X}) = \{\theta : h_{\mathbf{X}}^{-1}(B) \leq \theta \leq h_{\mathbf{X}}^{-1}(A)\}$$

Nota: En el Ejemplo 1, consideramos $U = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma_0$ y vimos que esta variable aleatoria tiene distribución $N(0, 1)$, o sea, independiente de μ . En ese ejemplo tomamos $A = -z_{\alpha/2}$ y $B = z_{\alpha/2}$. También podríamos haber tomado $A = -z_{\beta}$ y $B = z_{\gamma}$ donde β y γ son arbitrarios tales que $\beta + \gamma = \alpha$. El hecho de tomar $\beta = \gamma = \alpha/2$ se debe a que de esta forma se obtiene el intervalo más pequeño posible (Ver problema 1 de 5.1).

Veamos que el procedimiento que hemos usado en dicho ejemplo es el que se deduce del Teorema 1.

De acuerdo al Teorema 1,

$$\begin{aligned} S(\mathbf{X}) &= \{\mu : -z_{\frac{\alpha}{2}} \leq G(\mathbf{X}, \mu) \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\} = \\ &= \left\{ \mu : -z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma_0} \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \right\} = \\ &= \left\{ \mu : -z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} + \bar{X}_n \leq \mu \leq \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right\}. \end{aligned}$$

Vamos a tratar de usar un procedimiento similar para el caso de tener una muestra X_1, X_2, \dots, X_n de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$ donde ahora también σ^2 es desconocido. En este caso, parece natural reemplazar σ^2 por un estimador del mismo. Sabemos que el estimador IMVU para σ^2 es

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

y luego podríamos definir

$$U = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{s} \quad (5.1)$$

Para poder aplicar el método que nos proporciona el Teorema 1, debemos demostrar que U tiene una distribución que no depende de μ y σ^2 y, además, debemos conocer esa distribución. Esto se hará en el siguiente Teorema.

Teorema 2: Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Luego

- (i) $V = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)$ tiene distribución $N(0, 1)$
- (ii) $W = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / \sigma^2$ tiene distribución χ^2 con $n-1$ grados de libertad
- (iii) V y W son independientes
- (iv) U dado por (5.1) tiene distribución \mathcal{T}_{n-1} , de Student con $n-1$ grados de libertad.

DEMOSTRACIÓN: Sea $Y_i = (X_i - \mu)/\sigma$, $1 \leq i \leq n$. Luego estas variables forman una muestra aleatoria de una distribución $N(0, 1)$. Además, es fácil verificar que

$$V = \sqrt{n} \bar{Y}, \quad W = \sum_{i=1}^n Y_i^2, \quad U = \frac{V}{\sqrt{W/(n-1)}}, \quad (5.2)$$

Sea \mathbf{a}_1 el vector fila n -dimensional con todas sus componentes iguales a $1/\sqrt{n}$. Como $\|\mathbf{a}_1\| = 1$, se puede completar una base ortonormal $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Sea A la matriz de $n \times n$ cuyas filas son $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Como las filas de A son ortogonales y de norma 1, la matriz A resulta ortogonal. Consideremos

la transformación $\mathbf{Z} = A\mathbf{Y}$, donde $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)'$ y $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)'$. Luego, por una propiedad de los vectores normales respecto de transformaciones ortogonales, las variables Z_1, \dots, Z_n son también independientes con distribución $N(0, 1)$. Por otro lado, resulta

$$Z_1 = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \bar{Y} = V \quad (5.3)$$

y el punto (i) queda demostrado.

Además, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\bar{Y}^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - Z_1^2. \quad (5.4)$$

Como A es ortogonal se deduce que

$$\sum_{i=1}^n Z_i^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2,$$

y usando (5.2) y (5.4) obtenemos

$$W = \sum_{i=2}^n Z_i^2,$$

y por lo tanto queda demostrado (ii).

Como V depende de Z_1 y W de Z_2, \dots, Z_n también queda demostrado (iii).

Finalmente, (iv) se deduce de los puntos (i), (ii), (iii) del Teorema y de (5.2).

Estamos ahora en condiciones de encontrar intervalos de confianza para la media, en el caso de una muestra aleatoria con media y varianza desconocidas.

Definamos $t_{n,\alpha}$ por la ecuación

$$P(U > t_{n,\alpha}) = \alpha$$

donde U es una variable aleatoria \mathcal{T}_n . Luego, análogamente al caso normal, se tiene:

$$P(-t_{n,\frac{\alpha}{2}} \leq U \leq t_{n,\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

Teorema 3: Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria cuya distribución pertenece a la familia $N(\mu, \sigma^2)$ con μ y σ^2 desconocidos. Luego si

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad y \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

se tiene que un intervalo de confianza con nivel $(1 - \alpha)$ para μ está dado por:

$$\left[\bar{X} - t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

DEMOSTRACIÓN: Por el Teorema 2 se tiene que $U = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/s$ tiene distribución T_{n-1} y luego

$$P(-t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \leq U \leq t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha .$$

Luego, por el Teorema 1

$$\left\{ \mu : -t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{s} \sqrt{n} \leq t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \right\}$$

es una región de confianza para μ con nivel $1 - \alpha$. Pero esta región es equivalente a

$$\left\{ \mu : \bar{X} - t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right\} .$$

En el próximo Teorema encontraremos intervalos de confianza para la varianza, en el caso de una muestra normal, con media conocida o no.

Definamos $\chi_{n, \alpha}^2$ por la ecuación

$$P(U > \chi_{n, \alpha}^2) = \alpha$$

donde U es una variable aleatoria con distribución χ_n^2 .

Teorema 4: Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria cuya distribución pertenece a la familia $N(\mu, \sigma^2)$. Sean β y γ tales que $\beta + \gamma = \alpha$

- (i) Si μ es conocido, un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ para σ^2 está dado por:

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{n, \beta}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{n, 1-\gamma}^2} \right]$$

- (ii) Si μ es desconocido, un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ para σ^2 está dado por:

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_{n-1, \beta}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_{n-1, 1-\gamma}^2} \right]$$

DEMOSTRACIÓN: (i) Sea $W = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 / \sigma^2$. Como las variables $Y_i = (X_i - \mu) / \sigma$ son independientes, con distribución $N(0, 1)$ y $W = \sum_{i=1}^n Y_i^2$ entonces W tiene distribución χ_n^2 . Luego:

$$\begin{aligned} P(\chi_{n, 1-\gamma}^2 \leq W \leq \chi_{n, \beta}^2) &= P(W \geq \chi_{n, 1-\gamma}^2) - P(W > \chi_{n, \beta}^2) = \\ &= 1 - \gamma - \beta = 1 - \alpha \end{aligned}$$

Entonces, una región de confianza a nivel $1 - \alpha$ está dada por

$$\begin{aligned} &\left\{ \sigma^2 : \chi_{n, 1-\gamma}^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \leq \chi_{n, \beta}^2 \right\} = \\ &= \left\{ \sigma^2 : \frac{1}{\chi_{n, \beta}^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \leq \frac{1}{\chi_{n, 1-\gamma}^2} \right\} \end{aligned}$$

y esto es equivalente a la región definida en (i).

- (ii) Definamos ahora

$$W = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

Sabemos por el Teorema 2 (ii) que W tiene distribución χ_{n-1}^2 . Por lo tanto:

$$P(\chi_{n-1, 1-\gamma}^2 \leq W \leq \chi_{n-1, \beta}^2) = 1 - \alpha$$

Entonces, una región de confianza de nivel $1 - \alpha$ está dada por:

$$\begin{aligned} &\left\{ \sigma^2 : \chi_{n-1, 1-\gamma}^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \leq \chi_{n-1, \beta}^2 \right\} \\ &= \left\{ \sigma^2 : \frac{1}{\chi_{n-1, \beta}^2} \leq \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \leq \frac{1}{\chi_{n-1, 1-\gamma}^2} \right\} \\ &= \left\{ \sigma^2 : \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_{n-1, \beta}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_{n-1, 1-\gamma}^2} \right\}. \end{aligned}$$

5.3 Procedimiento en dos pasos para encontrar un intervalo de longitud prefijada para la media de una $N(\mu, \sigma^2)$, μ y σ desconocidos

Volvamos a considerar el intervalo de confianza para μ cuando σ^2 es desconocido, en el caso de una muestra con distribución $N(\mu, \sigma^2)$. La longitud de dicho intervalo, $L(X_1, \dots, X_n)$, está dada por

$$L(X_1, \dots, X_n) = 2t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Como se ve, este intervalo tiene longitud variable, ya que depende de s , que es una variable aleatoria dependiente de los valores que toma la muestra. Luego, es imposible calcular n de modo que la longitud del intervalo sea igual a un número prefijado. Esto es comprensible, ya que lógicamente cuanto más grande sea la varianza, más grande debe ser la muestra necesaria para obtener la misma precisión en la estimación de μ . Como σ^2 no es conocida, no se podrá asegurar con una muestra de tamaño fijo una determinada precisión, es decir, una determinada longitud del intervalo. Una manera de solucionar este problema es tomando dos muestras, una inicial para estimar σ^2 , y en base a esta estimación, determinar el tamaño de otra muestra complementaria que nos permita obtener un intervalo con la longitud deseada.

Seguidamente describimos el método. Supongamos que se quiera obtener un intervalo de confianza de longitud L para la media μ , de una población normal con media y varianza desconocida. Se toma una muestra inicial de tamaño m : X_1, \dots, X_m . Este valor m inicial, puede ser cualquier valor mayor que dos. A partir de este valor inicial estimamos σ^2 por:

$$s_m^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X}_m)^2 \quad \text{donde} \quad \bar{X}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i$$

Luego, la muestra complementaria se debe tomar de tamaño n donde n satisface

$$2t_{m+n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{s_m}{\sqrt{m+n}} \leq L \quad (5.5)$$

Sea X_{m+1}, \dots, X_{m+n} la muestra complementaria y

$$\bar{X}_{m+n} = \frac{1}{m+n} \sum_{i=1}^{m+n} X_i$$

El intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ estará dado por:

$$\left[\bar{X}_{m+n} - t_{m-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{s_m}{\sqrt{m+n}}, \quad \bar{X}_{m+n} + t_{m-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{s_m}{\sqrt{m+n}} \right] \quad (5.6)$$

Este intervalo tiene longitud $2t_{m-1, \frac{\alpha}{2}} s_m / \sqrt{m+n}$ que por (5.5) es menor o igual que L .

El siguiente Teorema muestra que el intervalo dado por (5.6) es un intervalo de confianza para μ de nivel $1 - \alpha$.

Teorema 5: Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes con distribución $N(\mu, \sigma^2)$, donde n se elige satisfaciendo (5.5). Luego el intervalo dado por (5.6) es un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ de longitud menor o igual que L .

DEMOSTRACIÓN: Comencemos por mostrar las siguientes proposiciones:

- (i) $W = (m-1)s_m^2/\sigma^2$ tiene distribución χ_{m-1}^2
- (ii) $V = \sqrt{m+n}(\bar{X}_{m+n} - \mu)/\sigma$ tiene distribución $N(0, 1)$
- (iii) V y W son independientes
- (iv) $\sqrt{m+n}(\bar{X}_{m+n} - \mu)/s_m$ tiene distribución T_{m-1}

En el Teorema 2 ya ha sido probado (i).

Podría parecer que (ii) fue demostrada en el mismo Teorema. Sin embargo, esto no es cierto ya que lo que se demostró es que el promedio normalizado de observaciones $N(\mu, \sigma^2)$ tiene distribución $N(0, 1)$, para un tamaño de muestra fijo. En nuestro caso, n es un número aleatorio, ya que depende del valor s_m , obtenido con las primeras m observaciones. Comencemos obteniendo la función de distribución conjunta de V y W , $F_{VW}(v, w) = P(V \leq v, W \leq w)$.

Llamemos A_i al evento $\{n = i\}$. Los sucesos A_i son obviamente disjuntos y además $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$, donde Ω es el espacio muestral.

Dado un evento cualquiera A , se tiene

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap A_i) \\ P(A) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap A_i), \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} F_{VW}(v, w) &= P(V \leq v, W \leq w) = \sum_{i=0}^{\infty} P(V \leq v, W \leq w, n = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} P\left(\sqrt{m+i} \frac{(\bar{X}_{m+i} - \mu)}{\sigma} \leq v, W \leq w, n = i\right). \end{aligned}$$

En virtud del Teorema 2, se tiene que $\sum_{j=1}^m X_j$ es independiente de s_m y por otra parte, cada X_j con $j > m$ también es independiente de s_m . Por lo tanto, como $\bar{X}_{m+i} = (1/(m+i))(\sum_{j=1}^m X_j + \sum_{j=m+1}^{m+i} X_j)$ se deduce que \bar{X}_{m+i} es independiente de s_m .

Por otro lado, de acuerdo con su definición, n depende sólo de s_m . Luego, el suceso

$$\left\{ \sqrt{m+i} \frac{(\bar{X}_{m+i} - \mu)}{\sigma} \leq v \right\}$$

es independiente de $\{W \leq w\} \cap \{n = i\}$ y por lo tanto,

$$F_{VW}(v, w) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(\sqrt{m+i} \frac{(\bar{X}_{m+i} - \mu)}{\sigma} \leq v\right) P(W \leq w, n = i).$$

Pero, por el Teorema 2, para cada i fijo $\sqrt{m+i}(\bar{X}_{m+i} - \mu)/\sigma$ tiene distribución $N(0, 1)$. Luego si $\Phi(v)$ es la función de distribución de una variable $N(0, 1)$, se tendrá

$$\begin{aligned} F_{VW}(v, w) &= \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(v) P(W \leq w, n = i) \\ &= \Phi(v) \sum_{i=0}^{\infty} P(W \leq w, n = i). \end{aligned}$$

Pero $\sum_{i=1}^{\infty} P(W \leq w, n = i) = P(W \leq w) = F_W(w)$. Por lo tanto, se tiene

$$F_{VW}(v, w) = \Phi(v) F_W(w) \quad (5.7)$$

y como

$$F_V(v) = \lim_{w \rightarrow \infty} F_{VW}(v, w) = \Phi(v) \lim_{w \rightarrow \infty} F_W(w) = \Phi(v),$$

hemos demostrado (ii).

Para demostrar (iii) reemplacemos en (5.7) $\Phi(v)$ por $F_V(v)$ y obtenemos

$$F_{VW}(v, w) = F_V(v)F_W(w)$$

lo que implica que V y W son independientes.

(iv) se deduce inmediatamente de (i), (ii) y (iii), teniendo en cuenta que

$$\frac{\sqrt{m+n}(\bar{X}_{m+n} - \mu)}{s_m} = \frac{\sqrt{m+n}(\bar{X}_{m+n} - \mu)/\sigma}{((m-1)s_m^2/(m-1)\sigma^2)^{1/2}}$$

Llamemos U a esta última variable, de acuerdo a (iv) se tiene que U tiene distribución independiente de μ y σ^2 y además

$$P(-t_{m-1, \frac{\alpha}{2}} \leq U \leq t_{m-1, \frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

Luego, de acuerdo con el método general para obtener regiones de confianza, se tendrá que una región de confianza para μ de nivel $(1 - \alpha)$ estará dada por:

$$\begin{aligned} & \left\{ \mu : -t_{m-1, \frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{m+n}(\bar{X}_{m+n} - \mu)}{s_m} \leq t_{m-1, \frac{\alpha}{2}} \right\} \\ = & \left\{ \mu : \bar{X}_{m+n} - t_{m-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{s_m}{\sqrt{m+n}} \leq \mu \leq \bar{X}_{m+n} + t_{m-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{s_m}{\sqrt{m+n}} \right\}. \end{aligned}$$

Nota: El tamaño de la muestra inicial, m , puede ser, en principio, cualquiera con la condición de que sea mayor que dos. El valor más conveniente a usar dependerá del conocimiento previo que se tenga sobre σ^2 . Si m es muy pequeño, la estimación de σ^2 será poco confiable y habrá que tomar una segunda muestra grande, con lo cual aumentará el costo. Si se toma muy grande, es probable que se tomen más observaciones que las necesarias. Lo ideal sería elegir m cerca del número total de observaciones que serían necesarias si se conociera σ^2 .

5.4 Intervalos de confianza para diferencia de medias de una distribución normal

5.4.1 Muestras independientes

Supongamos primero que se tienen dos muestras aleatorias X_1, \dots, X_{n_1} y Y_1, \dots, Y_{n_2} independientes entre sí, de distribuciones $N(\mu_1, \sigma^2)$ y $N(\mu_2, \sigma^2)$

respectivamente con μ_1, μ_2 y σ^2 desconocidos, y se desea encontrar un intervalo de confianza para $\lambda = \mu_1 - \mu_2$. Observemos que $\hat{\lambda} = \bar{Y} - \bar{X}$ es un estimador insesgado de λ . Es fácil demostrar utilizando el Teorema 2 de la sección 3.12 que este estimador es IMVU.

La varianza de este estimador es

$$\sigma^2_{\hat{\lambda}} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \quad (5.8)$$

Por lo tanto,

$$U = \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sigma_{\hat{\lambda}}} = \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma} \quad (5.9)$$

tiene distribución $N(0,1)$.

Como σ es desconocido, no podemos utilizar U para encontrar un intervalo de confianza para λ . La solución a este problema es reemplazar σ por un estimador. Un estimador insesgado de σ^2 es

$$s^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \left(\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2 \right)$$

Para demostrar que s^2 es insesgado basta recordar que de acuerdo a lo visto en el Capítulo 3 se tiene

$$E\left(\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2\right) = (n_1 - 1)\sigma^2$$

y

$$E\left(\sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2\right) = (n_2 - 1)\sigma^2.$$

También del Teorema 2 de la Sección 3.12 se puede deducir que s^2 es IMVU. Luego, definimos el estadístico T reemplazando en U el parámetro σ por el estimador s , es decir,

$$T = \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\hat{\sigma}_{\hat{\lambda}}} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{s} \quad (5.10)$$

donde

$$\hat{\sigma}_{\hat{\lambda}}^2 = s^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \quad (5.11)$$

El siguiente Teorema prueba que T tiene distribución de Student con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad

Teorema 1: Sean X_1, \dots, X_{n_1} y Y_1, \dots, Y_{n_2} dos muestras aleatorias independientes de las distribuciones $N(\mu_1, \sigma^2)$ y $N(\mu_2, \sigma^2)$ respectivamente. Sean

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2}{\sigma^2}$$

Luego

(i) U definida en (5.9), V y W son variables aleatorias independientes con distribuciones $N(0, 1)$, $\chi_{n_1-1}^2$ y $\chi_{n_2-1}^2$ respectivamente.

(ii) La variable

$$Z = V + W$$

tiene distribución $\chi_{n_1+n_2-2}^2$.

(iii) La variable T definida en (5.10) tiene distribución $\mathcal{T}_{n_1+n_2-2}$.

(iv) El intervalo

$$\left[\hat{\lambda} - t_{n_1+n_2-2, \frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\lambda}}, \hat{\lambda} + t_{n_1+n_2-2, \frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\lambda}} \right]$$

es un intervalo de confianza a nivel $1 - \alpha$ para $\lambda = \mu_1 - \mu_2$.

DEMOSTRACIÓN: Ya hemos demostrado que U tiene distribución $N(0, 1)$.

Por otra parte, en el Teorema 2 de la Sección 5.2, se demostró la independencia entre \bar{X} y V y entre \bar{Y} y W . Como además resulta \bar{X} independiente de W (la primera depende de X_1, \dots, X_{n_1} y la segunda de Y_1, \dots, Y_{n_2}) y \bar{Y} independiente de V , resulta U independiente de V y W . En el mismo Teorema se demostró que V y W tienen distribuciones $\chi_{n_1-1}^2$ y $\chi_{n_2-1}^2$, respectivamente. Resulta entonces claro que V y W son también independientes.

Para demostrar (ii) basta utilizar el hecho de que suma de variables χ^2 independientes tiene también distribución χ^2 con número de grados de libertad igual a la suma de los grados de libertad de los sumandos.

El resultado (iii) resulta inmediato de los puntos (i) y (ii). El resultado (iv) resulta de aplicar (ii) y el Teorema 1 de la Sección 5.2.

En el caso más simple en que σ^2 sea conocido, se puede también encontrar fácilmente un intervalo de confianza para λ utilizando el estadístico U .

Si X_1, \dots, X_{n_1} y Y_1, \dots, Y_{n_2} son muestras aleatorias independientes entre sí de distribuciones $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ con μ_1, μ_2, σ_1^2 y σ_2^2 desconocidos ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$), el problema de encontrar una región de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ con nivel exacto $1 - \alpha$ no tiene una solución totalmente satisfactoria. Este problema se conoce con el nombre de Behrens–Fisher. Sin embargo, es posible encontrar en forma sencilla un intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ de nivel asintótico $1 - \alpha$ (ver definición 1 y problema 7 de 5.6).

Nota 1: Si X_1, \dots, X_{n_1} y Y_1, \dots, Y_{n_2} son muestras aleatorias independientes entre sí de distribuciones $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ respectivamente, con μ_1, μ_2 conocidos o no, entonces:

- (1) Si $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ se pueden encontrar intervalos de confianza para σ^2 (o para σ) (ver problema 1 de 5.4).
- (2) Si no se puede suponer $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ es posible encontrar intervalos de confianza para σ_2^2/σ_1^2 (o para σ_2/σ_1) (ver problema 2 de 5.4).

5.4.2 Muestras apareadas

Supongamos ahora que $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ es una muestra aleatoria de una distribución normal bivariada $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ con $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$ desconocidos y que se desea encontrar un intervalo de confianza para $\lambda = \mu_1 - \mu_2$.

En este caso podemos definir las variables $Z_i = X_i - Y_i$, $1 \leq i \leq n$. Estas variables forman una muestra de una distribución $N(\lambda, \sigma_Z^2)$, con

$$\sigma_Z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2,$$

y por lo tanto, de acuerdo a lo visto en el Teorema 3 de la Sección 5.2 tenemos que un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ está dado por

$$\left[\bar{Z} - t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{s_Z}{\sqrt{n}}, \bar{Z} + t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{s_Z}{\sqrt{n}} \right] \quad (5.12)$$

donde

$$\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i, \quad s_Z^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2.$$

Nota 2: Muchas veces, en los casos reales, interesará decidir antes de tomar la muestra, si conviene usar un diseño de muestras aleatorias independientes entre sí provenientes de distribuciones $N(\mu_1, \sigma^2)$, $N(\mu_2, \sigma^2)$ o muestras apareadas provenientes de una distribución bivariada, $N(\mu_1, \mu_2, \sigma^2, \sigma^2, \rho)$.

Por ejemplo, si se quiere estimar la diferencia de rendimientos de dos variedades de un cereal, uno podría preguntarse cuál de los dos diseños siguientes proveerá más información sobre esta diferencia:

- (i) Elegir al azar en el terreno considerado $2n$ parcelas de área A . En n de ellas elegidas al azar cultivar la variedad 1 y en las restantes cultivar la variedad 2.
- (ii) Elegir al azar n parcelas de área $2A$ y dividir cada una de ellas en dos mitades de la misma área. y luego éstas en dos mitades. En cada mitad de una parcela cultivar una variedad distinta.

En el primer caso, tendríamos un diseño correspondiente a muestras aleatorias normales independientes entre sí. En el segundo, uno correspondiente a muestras apareadas que podrían ser consideradas provenientes de una normal bivariada con un cierto cociente de correlación ρ .

Trataremos de determinar cuál de los dos diseños es mejor, comparando las longitudes de los intervalos de confianza respectivos. Para esto supondremos que las varianzas para los rendimientos de ambos cereales son los mismos.

Para el caso de muestras independientes tendremos $n_1 = n_2 = n$, y la longitud del intervalo viene dado por

$$L_1 = 2t_{2n-2, \frac{\alpha}{2}} \sqrt{2 \frac{s^2}{n}}$$

donde

$$s^2 = \frac{1}{2n-2} \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \right)$$

y para el caso de muestras para muestras apareadas

$$L_2 = 2t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s_Z^2}{n}}$$

donde

$$s_Z^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 .$$

Como estas longitudes dependen de la muestra considerada, y por lo tanto son aleatorias, consideraremos cuál diseño nos provee el intervalo con menor longitud cuadrada esperada. Es decir, compararemos las esperanzas de los cuadrados de las longitudes. Se toman cuadrados por la única razón de simplificar el cálculo de las esperanzas. Como s^2 y s_Z^2 son estimadores insesgados de σ^2 y de $\sigma_Z^2 = 2(1 - \rho)\sigma^2$, se tiene

$$E(L_1^2) = \frac{4 \times 2\sigma^2 t_{2n-2, \frac{\alpha}{2}}^2}{n}$$

y en el caso de muestras apareadas

$$E(L_2^2) = \frac{4 \times 2\sigma^2(1 - \rho)t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2}{n}$$

Luego resulta

$$\frac{E(L_2^2)}{E(L_1^2)} = (1 - \rho) \frac{t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2}{t_{2n-2, \frac{\alpha}{2}}^2}$$

Por lo tanto será mejor tomar muestras apareadas si

$$(1 - \rho) \frac{t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2}{t_{2n-2, \frac{\alpha}{2}}^2} < 1$$

o sea si

$$\rho > 1 - \frac{t_{2n-2, \frac{\alpha}{2}}^2}{t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2} \quad (5.13)$$

Se puede mostrar que $t_{n, \frac{\alpha}{2}}$ tiende a $z_{\frac{\alpha}{2}}$ en forma monótona decreciente cuando $n \rightarrow \infty$. Luego se tendrá que

$$\lambda = 1 - \frac{t_{2n-2, \frac{\alpha}{2}}^2}{t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2} > 0$$

tendiendo a 0 cuando $n \rightarrow \infty$.

Luego, para que sea más conveniente tomar muestras apareadas es una condición necesaria que $\rho > 0$. Para muestras grandes esta condición es prácticamente suficiente ya que λ se hace muy pequeño.

Sea, por ejemplo, $n = 20$ y $\alpha = 0.05$, luego $\lambda = 0.03$. Luego basta que $\rho > 0.03$ para que el diseño apareado sea más eficiente. Para un ejemplo práctico, ver ejercicio 3 de 5.4. Por otra parte, por (5.13) resulta que en caso de tomarse muestras apareadas convendrá elegir los pares de manera que ρ sea lo más grande posible.

5.5 Optimalidad de los intervalos de confianza

Sea \mathbf{X} un vector cuya distribución pertenece a la familia $F(\mathbf{x}, \theta)$ con $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ y sea $S(\mathbf{X}) = [a(\mathbf{X}), b(\mathbf{X})]$ un intervalo de confianza con nivel $1 - \alpha$ para θ . Como ya lo hemos observado en 5.1, la precisión de nuestra estimación vendrá dada por la longitud del intervalo, es decir, por $L(\mathbf{X}) = b(\mathbf{X}) - a(\mathbf{X})$ y por lo tanto, será conveniente que ésta fuese lo menor posible. Como ya lo hemos visto, $L(\mathbf{X})$ es en general una variable aleatoria; luego parece razonable como criterio para medir la bondad de un intervalo de confianza considerar $E_\theta(L(\mathbf{X}))$.

Luego, un intervalo de confianza con nivel $1 - \alpha$, $[a(\mathbf{X}), b(\mathbf{X})]$, puede ser considerado óptimo si, para todo otro intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$, $[a'(\mathbf{X}), b'(\mathbf{X})]$ se tiene

$$E_\theta(b(\mathbf{X}) - a(\mathbf{X})) \leq E_\theta(b'(\mathbf{X}) - a'(\mathbf{X})) \quad \forall \theta \in \Theta .$$

Sin embargo, igual que en el caso de estimación puntual, es posible mostrar que salvo ejemplos triviales no existen intervalos con esta propiedad. La única forma de encontrar intervalos óptimos es restringir la clase de posibles intervalos.

Una forma de restringir los posibles intervalos de confianza o en general las regiones de confianza, es exigiendo la siguiente propiedad.

Definición 1: Se dirá que una región $S(\mathbf{X})$ es *insesgada* si

$$P_\theta(\theta \in S(\mathbf{X})) \geq P_\theta(\theta' \in S(\mathbf{X})) \quad \forall \theta, \theta' \in \Theta .$$

Es decir que $S(\mathbf{X})$ es insesgado si el valor verdadero θ tiene mayor probabilidad de estar en la región que cualquier otro valor θ' .

Luego parece natural buscar el intervalo de confianza de menor longitud entre los intervalos de confianza insesgados. Luego surge la siguiente definición:

Definición 2: Se dirá que un intervalo de confianza $S(\mathbf{X})$ es *insesgado de mínima longitud esperada uniformemente* en θ (IMLEU) con nivel $(1 - \alpha)$ si

- a) $S(\mathbf{X})$ es insesgado y tiene nivel $(1 - \alpha)$.
- b) Sea $S(\mathbf{X}) = [a(\mathbf{X}), b(\mathbf{X})]$. Luego si $S'(\mathbf{X}) = [a'(\mathbf{X}), b'(\mathbf{X})]$ es otro intervalo insesgado de nivel $1 - \alpha$, se tiene

$$E_\theta(b(\mathbf{X}) - a(\mathbf{X})) \leq E_\theta(b'(\mathbf{X}) - a'(\mathbf{X})) \quad \forall \theta \in \Theta .$$

Se puede mostrar que los intervalos obtenidos para μ cuando X_1, \dots, X_n es una muestra aleatoria de $N(\mu, \sigma^2)$ para el caso de σ^2 conocido o desconocido (en Ejemplo 1 de 5.1 y Teorema 3 de 5.2) son realmente IMLEU. También, los intervalos obtenidos para σ^2 cuando μ es conocido o desconocido en el Teorema 4 de 5.2 es IMLEU, si β y γ se eligen de manera que la longitud esperada sea mínima. Se puede mostrar que para n grande estos β y γ se aproximan a $\alpha/2$ (ver [3]). Los procedimientos desarrollados en 5.4 para encontrar intervalos de confianza para las diferencias de medias también son IMLEU.

El estudio detallado de la optimalidad de estos procedimientos puede verse en Pratt [2]. Estos resultados dependen de resultados relacionados con la teoría de tests óptimos que puede verse en Lehmann [1].

5.6 Regiones de confianza con nivel asintótico $(1 - \alpha)$

En muchos problemas estadísticos, es imposible o muy complicado encontrar regiones de confianza con un nivel dado. En su reemplazo se pueden construir regiones cuyo nivel sea aproximadamente el deseado, tendiendo a él a medida que el tamaño de la muestra aumenta. La siguiente definición formaliza esta idea.

Definición 1: Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución perteneciente a la familia $F(x, \theta)$, $\theta \in \Theta$. Se dice que $S_n(X_1, \dots, X_n)$ es una sucesión de regiones de confianza con nivel asintótico $1 - \alpha$ si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta}(\theta \in S_n(X_1, \dots, X_n)) = 1 - \alpha \quad \forall \theta \in \Theta.$$

El siguiente Teorema nos da un procedimiento para construir intervalos de confianza con nivel asintótico $(1 - \alpha)$.

Teorema 1: Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución perteneciente a la familia $F(x, \theta)$, $\theta \in \Theta$. Supongamos que para cada n se tienen definidas funciones $U_n = G_n(X_1, \dots, X_n, \theta)$ tales que U_n converge a U en distribución, donde U es una variable aleatoria con distribución independiente de θ . Sean A y B puntos de continuidad de F_U , tales que $P(A \leq U \leq B) = 1 - \alpha$. Definamos $S_n(X_1, \dots, X_n) = \{\theta : A \leq G_n(X_1, \dots, X_n, \theta) \leq B\}$. Luego, $S_n(X_1, \dots, X_n)$ es una sucesión de regiones de confianza con nivel asintótico $(1 - \alpha)$.

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned} P_{\theta}(\theta \in S_n(X_1, \dots, X_n)) &= P_{\theta}(A \leq G_n(X_1, \dots, X_n, \theta) \leq B) \\ &= P_{\theta}(A \leq U_n \leq B) \end{aligned}$$

Luego, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta}(\theta \in S_n(X_1, \dots, X_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta}(A \leq U_n \leq B) = P_{\theta}(A \leq U \leq B) = P(A \leq U \leq B) = 1 - \alpha$.

Ejemplo 1: Sea X_1, \dots, X_n una muestra independiente de una distribución $B_i(\theta, 1)$. Definamos:

$$U_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}$$

Sabemos por el Teorema Central del Límite que U_n converge en distribución a una ley $N(0, 1)$; por lo tanto, una sucesión de regiones de confianza con nivel asintótico $1 - \alpha$ vendrá dada por:

$$\begin{aligned} S_n(X_1, \dots, X_n) &= \left\{ \theta : -z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \right\} \\ &= \left\{ \theta : \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \right)^2 \leq z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \right\} \\ &= \left\{ \theta : \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 + n^2\theta^2 - 2n\theta \sum_{i=1}^n X_i \leq z_{\frac{\alpha}{2}}^2 n\theta(1-\theta) \right\} \\ &= \left\{ \theta : \theta^2(n^2 + nz_{\frac{\alpha}{2}}^2) - \theta \left(2n \sum_{i=1}^n X_i + z_{\frac{\alpha}{2}}^2 n \right) + \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \leq 0 \right\} \\ &= [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] \end{aligned}$$

donde $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son las raíces de la ecuación

$$\theta^2(n^2 + nz_{\frac{\alpha}{2}}^2) - \theta \left(2n \sum_{i=1}^n X_i + z_{\frac{\alpha}{2}}^2 n \right) + \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 = 0$$

La siguiente propiedad, que daremos sin demostración y que es equivalente a la propiedad 5 de 1.8, nos permitirá encontrar un intervalo de confianza más sencillo para θ en el ejemplo anterior.

Propiedad 1: Sea X_n una sucesión de variables aleatorias, X una variable aleatoria y a una constante. Supongamos que $X_n \rightarrow X$ en distribución.

Sea además, una sucesión de variables aleatorias Y_n tal que $Y_n \rightarrow a$ en probabilidad; luego $Y_n X_n \rightarrow aX$ en distribución.

Volvamos ahora al Ejemplo 1. U_n se puede escribir

$$U_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)}{\sqrt{\theta(1 - \theta)}}$$

Por otro lado, sabemos que un estimador consistente de θ es \bar{X} . Luego

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\theta(1 - \theta)}} \quad \text{en probabilidad.}$$

Con lo cual, usando la propiedad anterior y llamando

$$V_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)}{\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})}}$$

se tiene que $V_n \rightarrow N(0, 1)$ en distribución.

Por lo tanto, un intervalo de confianza para θ de nivel $1 - \alpha$, viene dado por

$$\begin{aligned} S_n(X_1, \dots, X_n) &= \left\{ \theta : -z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)}{\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \right\} \\ &= \left[\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})}}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})}}{\sqrt{n}} \right] \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Supongamos que se tiene una muestra aleatoria X_1, \dots, X_n de una distribución totalmente desconocida y sólo se sabe que $E(X_1) = \mu$ y $\text{Var}(X_1) = \sigma^2$ son finitos. Se quiere encontrar un intervalo de confianza para μ con nivel asintótico $1 - \alpha$. Sea

$$U_n = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$$

Por el Teorema Central del Límite, sabemos que $U_n \rightarrow N(0, 1)$ en distribución.

Por otro lado,

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

es un estimador fuertemente consistente de σ^2 . Luego, $s_n \rightarrow \sigma$ en probabilidad.

Con lo cual, utilizando la Propiedad 1, si

$$V_n = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/s_n$$

se tendrá que

$$V_n \rightarrow N(0, 1) \quad \text{en distribución.}$$

Luego, un intervalo de confianza para μ , con nivel asintótico $1 - \alpha$ estará dado por

$$\begin{aligned} S_n(X_1, \dots, X_n) &= \left\{ \mu : -z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{s_n} \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \right\} \\ &= \left[\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s_n}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s_n}{\sqrt{n}} \right]. \end{aligned}$$

5.7 Regiones de confianza basadas en estimadores de máxima verosimilitud

Veamos ahora un procedimiento que nos permitirá, en condiciones bastante generales, encontrar regiones de confianza con nivel asintótico $(1 - \alpha)$.

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución con densidad $f(x, \theta)$. Sabemos, que bajo condiciones muy generales (ver Capítulo 3) el estimador de máxima verosimilitud, EMV, $\hat{\theta}$ tiene distribución asintóticamente normal. Más precisamente, cuando $\theta \in \mathbb{R}$ bajo condiciones de regularidad,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \rightarrow N(0, \frac{1}{I_1(\theta)}) \quad \text{en distribución,}$$

donde $I_1(\theta)$ es el número de información de Fisher de X_1 .

Luego, si llamamos

$$U_n = \sqrt{n} \sqrt{I_1(\theta)} (\hat{\theta}_n - \theta)$$

se tendrá que

$$U_n \rightarrow N(0, 1) \quad \text{en distribución.}$$

Por lo tanto, una región de confianza para θ de nivel asintótico $1 - \alpha$ estará dada por

$$S_n = \{ \theta : -z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n} \sqrt{I_1(\theta)} (\hat{\theta}_n - \theta) \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \}$$

Obsérvese que éste fue el procedimiento que se usó en el Ejemplo 1 de (5.6)(demostrarlo).

Esta región no tiene porqué ser un intervalo, y puede ser difícil de calcular. En el caso en que $I_1(\theta)$ sea continua, se podrá obtener un intervalo de confianza a nivel asintótico $(1 - \alpha)$, de la siguiente forma relativamente simple: Sabemos que $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta$ en probabilidad, ya que el E.M.V. es consistente, entonces si $I_1(\theta)$ es continua, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1(\hat{\theta}_n) = I_1(\theta) \quad \text{en probabilidad.}$$

Si llamamos $U_n^* = \sqrt{n} \sqrt{I_1(\hat{\theta}_n)} (\hat{\theta}_n - \theta)$, resulta que

$$U_n^* \rightarrow N(0, 1) \quad \text{en distribución.}$$

Por lo tanto, un intervalo de confianza para θ de nivel de confianza asintótico $1 - \alpha$ vendrá dado por:

$$\begin{aligned} S_n &= \{ \theta : -z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n} \sqrt{I_1(\hat{\theta}_n)} (\hat{\theta}_n - \theta) \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \} \\ &= \left[\hat{\theta}_n - \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{I_1(\hat{\theta}_n)} \sqrt{n}}, \hat{\theta}_n + \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{I_1(\hat{\theta}_n)} \sqrt{n}} \right]. \end{aligned}$$

La longitud de estos intervalos es

$$L = 2z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{I_1(\hat{\theta}_n)}}.$$

Luego, bajo condiciones en que vale el Teorema de consistencia del EMV se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} L = 2z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{I_1(\theta)}} \quad \text{c.t.p.}$$

y bajo condiciones muy generales, también se puede mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} E_{\theta}(L) = 2z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{I_1(\theta)}}.$$

Puede demostrarse que bajo condiciones muy generales, para todo intervalo \mathcal{I} insesgado, con nivel asintótico $1 - \alpha$ se tendrá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} E_{\theta}(L_{\mathcal{I}}) \geq 2z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{I_1(\theta)}}$$

donde, $L_{\mathcal{I}}$ indica la longitud del intervalo \mathcal{I} . Por lo tanto, los intervalos obtenidos a partir del estimador de máxima verosimilitud pueden considerarse asintóticamente insesgados de menor longitud esperada.

Para ver estas propiedades en detalle, consultar Wilks [4, pp. 374–376].

Luego de la descripción de los métodos para obtener intervalos de confianza a nivel asintótico, podría pensarse en los casos que es posible encontrarlos en lugar de los intervalos exactos. Sin embargo, la convergencia del nivel de confianza al valor deseado depende fuertemente de la distribución y podría ser necesario un tamaño de muestra grande para que la aproximación del nivel asintótico sea aceptable. En general, no se puede determinar el tamaño de muestra n para el cual la aproximación asintótica es suficientemente buena usando consideraciones teóricas. En la mayoría de los casos es necesario estudiar este problema por métodos de Monte Carlo que se estudiarán más adelante.

5.8 Regiones de confianza simultáneas

Supongamos que se tiene un vector aleatorio \mathbf{X} cuya distribución pertenece a la familia $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ y que $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$. Ocurre a veces que se tienen regiones de confianza para θ_1 y θ_2 por separado, es decir, se tienen $S_1(\mathbf{X})$ y $S_2(\mathbf{X})$, tales que:

$$P(\theta_1 \in S_1(\mathbf{X})) = 1 - \alpha \quad \text{y} \quad P(\theta_2 \in S_2(\mathbf{X})) = 1 - \alpha$$

pero $P(\theta_1 \in S_1(\mathbf{X}), \theta_2 \in S_2(\mathbf{X})) \leq 1 - \alpha$.

Luego, $S_1(\mathbf{X}) \times S_2(\mathbf{X})$ no es una región de confianza simultánea de nivel $(1 - \alpha)$ para (θ_1, θ_2) .

Una forma de conseguir que la probabilidad simultánea de que θ_1 y θ_2 estén en $S_1(\mathbf{X})$ y $S_2(\mathbf{X})$ respectivamente, sea al menos $(1 - \alpha)$ se obtiene considerando regiones de confianza de nivel $(1 - \alpha/2)$ para θ_1 y θ_2 , es decir, tales que:

$$P(\theta_1 \in S_1(\mathbf{X})) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \text{y} \quad P(\theta_2 \in S_2(\mathbf{X})) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Luego, si A^c indica el complemento del conjunto A ,

$$P(\theta_1 \in S_1(\mathbf{X}), \theta_2 \in S_2(\mathbf{X})) = 1 - P[(\theta_1 \in S_1(\mathbf{X}))^c \cup (\theta_2 \in S_2(\mathbf{X}))^c].$$

Como $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$, se deduce que

$$\begin{aligned} P(\theta_1 \in S_1(\mathbf{X}), \theta_2 \in S_2(\mathbf{X})) &\geq 1 - P(\theta_1 \notin S_1(\mathbf{X})) - P(\theta_2 \notin S_2(\mathbf{X})) \\ &= 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Es decir, tomando regiones de confianza para cada parámetro de nivel $1 - \alpha/2$ nos aseguramos un nivel simultáneo mayor o igual que $1 - \alpha$. Este procedimiento se puede generalizar inmediatamente para el caso que se requieran regiones simultáneas para k -parámetros. Bastará tomar para cada parámetro un región de nivel α/k .

Ejemplo 1: Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Hemos visto que un intervalo de confianza para μ de nivel $1 - \alpha$ está dado por:

$$S_1 = \left[\bar{X} - t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right],$$

mientras que un intervalo de confianza para σ^2 de nivel $1 - \alpha$ está dado por:

$$S_2 = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2} \right].$$

Luego, si tomamos

$$\begin{aligned} S_1^* &= \left[\bar{X} - t_{n-1, \frac{\alpha}{4}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1, \frac{\alpha}{4}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right], \\ \text{y } S_2^* &= \left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_{n-1, \frac{\alpha}{4}}^2}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{4}}^2} \right] \end{aligned}$$

$S_1^* \times S_2^*$ es una región de confianza simultánea para (μ, σ^2) de nivel mayor o igual que $1 - \alpha$.

El inconveniente que tiene este método es que el nivel es mayor que el deseado, esto ofrece más seguridad que la deseada de que los valores de los parámetros estarán dentro de la región, pero por otra parte las regiones resultan más grandes que lo necesario y por lo tanto, será más imprecisa la determinación de los parámetros.

Obtendremos ahora en el caso normal una región de confianza simultánea para μ y σ^2 de nivel exactamente igual a $1 - \alpha$.

Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Sabemos que $U = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$ y $V = S^2/\sigma^2$, donde $S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ son independientes con distribución $N(0, 1)$ y χ_{n-1}^2 respectivamente. Luego, se tendrá

$$P \left(-z_{\frac{\beta}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \leq z_{\frac{\beta}{2}}, \chi_{n-1, 1-\frac{\beta}{2}}^2 \leq \frac{S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{n-1, \frac{\beta}{2}}^2 \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= P\left(-z_{\frac{\beta}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \leq z_{\frac{\beta}{2}}\right) P\left(\chi_{n-1, 1-\frac{\beta}{2}}^2 \leq \frac{S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{n-1, \frac{\beta}{2}}^2\right) \\
&= (1 - \beta)(1 - \beta) = (1 - \beta)^2
\end{aligned}$$

Tomemos $\beta = 1 - (1 - \alpha)^{1/2}$, entonces $(1 - \beta)^2 = (1 - \alpha)$; luego

$$S_n = \left\{ (\mu, \sigma^2) : -z_{\frac{\beta}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \leq z_{\frac{\beta}{2}}, \chi_{n-1, 1-\frac{\beta}{2}}^2 \leq \frac{S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{n-1, \frac{\beta}{2}}^2 \right\}$$

es una región de confianza simultánea para (μ, σ^2) de nivel $1 - \alpha$. Para estudiar la forma de S_n podemos escribir

$$S_n = \left\{ (\mu, \sigma^2) : \frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{z_{\frac{\beta}{2}}^2} \leq \sigma^2, \frac{S^2}{\chi_{n-1, \frac{\beta}{2}}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{S^2}{\chi_{n-1, 1-\frac{\beta}{2}}^2} \right\}$$

La condición

$$\sigma^2 \geq \frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{z_{\frac{\beta}{2}}^2}$$

nos indica la región del plano (μ, σ^2) , por encima de la parábola $\sigma^2 = n(\bar{X} - \mu)^2 / z_{\frac{\beta}{2}}^2$ y la condición

$$\frac{S^2}{\chi_{n-1, \frac{\beta}{2}}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{S^2}{\chi_{n-1, 1-\frac{\beta}{2}}^2}$$

indica la franja horizontal comprendida entre las rectas horizontales $\sigma^2 = S^2 / \chi_{n-1, \frac{\beta}{2}}^2$ y $S^2 / \chi_{n-1, 1-\frac{\beta}{2}}^2$.

5.9 Cotas superiores e inferiores de confianza

En los ejemplos vistos anteriormente interesaba conocer el parámetro desconocido con la mayor precisión posible y para este propósito lo más adecuado era construir intervalos de confianza de longitud tan pequeña como era posible. En esta sección, estudiaremos otro tipo de regiones de confianza que surgen naturalmente cuando se está interesado en conocer una cota superior o inferior del parámetro.

Consideremos el siguiente ejemplo. En el Departamento de Control de un laboratorio se recibe un frasco con cierta droga que puede contener alguna impureza indeseada.

Supongamos que se hagan n mediciones de la concentración de la impureza, las que están afectadas de un error, luego se observan X_1, \dots, X_n donde

$$X_i = \mu + \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

donde μ es el valor verdadero de la concentración de la impureza y los ε_i son variables aleatorias $N(0, \sigma^2)$ independientes. Luego X_1, \dots, X_n es una muestra de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$.

En este caso, sólo se estará interesado en determinar si la droga es aceptable o no, y para esto más que un intervalo de confianza interesará tener una cota superior $\bar{\mu}(\mathbf{X})$, ($\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$) tal que la probabilidad de que $\mu \leq \bar{\mu}(X_1, \dots, X_n)$ sea alta. De esta manera se tendría acotada con probabilidad grande la concentración de impureza de la droga.

Esto sugiere la siguiente definición.

Definición 1: Sea \mathbf{X} un vector cuya distribución pertenece a la familia $F(\mathbf{x}, \theta)$, donde $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. Se dirá que $\bar{\theta}(\mathbf{X})$ es una *cota superior de confianza con nivel de confianza* $(1 - \alpha)$ para θ si $P(\bar{\theta}(\mathbf{X}) \geq \theta) = 1 - \alpha$ o sea si $(-\infty, \bar{\theta}(\mathbf{X})]$ es una región de confianza de nivel $1 - \alpha$. A este tipo de región de confianza semirrecta izquierda se denomina también *intervalo de confianza unilateral izquierdo con nivel* $1 - \alpha$.

Definición 2: Sea \mathbf{X} un vector cuya distribución pertenece a la familia $F(\mathbf{x}, \theta)$ con $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. Se dirá que $\underline{\theta}(\mathbf{X})$ es una *cota inferior de confianza con nivel de confianza* $1 - \alpha$ si $P(\underline{\theta}(\mathbf{X}) \leq \theta) = 1 - \alpha$, o sea si $[\underline{\theta}(\mathbf{X}), \infty)$ es una región de confianza de nivel $1 - \alpha$. A este tipo de región la denominaremos *intervalo de confianza unilateral derecho*.

El siguiente Teorema nos da un procedimiento general para obtener cotas superiores e inferiores de confianza con nivel $1 - \alpha$.

Teorema. Sea \mathbf{X} un vector aleatorio cuya distribución pertenece a la familia $F(\mathbf{x}, \theta)$ con $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. Sea $G(\mathbf{x}, \theta)$ una función estrictamente monótona en θ y tal que $U = G(\mathbf{X}, \theta)$ tiene distribución independiente de θ . Consideremos A y B tales que $P(U \leq A) = \alpha$ y $P(U \geq B) = \alpha$.

- (a) Si $G(\mathbf{x}, \theta)$ es creciente y continua en θ , las cotas superiores e inferiores con nivel de confianza $1 - \alpha$ vienen dadas respectivamente por las soluciones a las siguientes ecuaciones

$$G(\mathbf{X}, \bar{\theta}(\mathbf{X})) = B \quad \text{y} \quad G(\mathbf{X}, \underline{\theta}(\mathbf{X})) = A.$$

(b) Si $G(\mathbf{X}, \theta)$ es decreciente y continua en cambio $\bar{\theta}(\mathbf{X})$ y $\underline{\theta}(\mathbf{X})$ vienen dadas respectivamente por

$$G(\mathbf{X}, \bar{\theta}(\mathbf{X})) = A \quad \text{y} \quad G(\mathbf{X}, \underline{\theta}(\mathbf{X})) = B .$$

DEMOSTRACIÓN: La haremos sólo para el caso que $G(\mathbf{x}, \theta)$ es creciente en θ y para la cota superior. En este caso $\bar{\theta}(\mathbf{X})$ está definida por

$$G(\mathbf{X}, \bar{\theta}(\mathbf{X})) = B .$$

Luego,

$$\begin{aligned} P_{\theta}(\theta \leq \bar{\theta}(\mathbf{X})) &= P_{\theta}(G(\mathbf{X}, \theta) \leq G(\mathbf{X}, \bar{\theta}(\mathbf{X}))) \\ &= P_{\theta}(G(\mathbf{X}, \theta) \leq B) = P(U \leq B) = 1 - \alpha . \end{aligned}$$

Ejemplo 1: Supongamos que como en el ejemplo de la droga, donde se quería medir la concentración de impureza, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ es una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$ y supongamos que σ^2 sea conocido. Luego,

$$U = G(\mathbf{X}, \mu) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$$

tiene distribución $N(0, 1)$. Por lo tanto, en este caso $A = -z_{\alpha}$ y $B = z_{\alpha}$.

Luego, como $G(\mathbf{x}, \mu)$ es decreciente en μ se tendrá que las cotas superiores e inferiores de confianza de nivel de confianza $1 - \alpha$ se obtendrán de la siguiente forma.

Sean $\bar{\mu}(\mathbf{X})$ y $\underline{\mu}(\mathbf{X})$ definidas por

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \bar{\mu}(\mathbf{X}))}{\sigma} = -z_{\alpha}, \quad \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \underline{\mu}(\mathbf{X}))}{\sigma} = z_{\alpha}$$

es decir, despejando se obtiene

$$\bar{\mu}(\mathbf{X}) = \bar{X} + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \underline{\mu}(\mathbf{X}) = \bar{X} - z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ejemplo 2: Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$ y supongamos σ^2 desconocido; luego sabemos que

$$U = G(\mathbf{X}, \mu) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{s}$$

tiene distribución \mathcal{T}_{n-1} .

Luego, procediendo como en el Ejemplo 1, obtendremos como cota superior e inferior de confianza con nivel $1 - \alpha$

$$\bar{\mu}(\mathbf{X}) = \bar{X} + t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad y \quad \underline{\mu}(\mathbf{X}) = \bar{X} - t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

5.9.1 Comparación de cotas superiores e inferiores de confianza

Así como en el caso de intervalos de confianza interesaba que tuviesen longitud lo más corta posible, cabe preguntarse cómo sería deseable que fuesen las cotas superiores e inferiores. Planteado de otra manera, dadas por ejemplo dos cotas superiores $\bar{\theta}_1(\mathbf{X})$ y $\bar{\theta}_2(\mathbf{X})$, existe algún criterio para compararlas y concluir por ejemplo que una es más conveniente que otra? Análogamente en el caso de cotas inferiores.

Como en el caso de cota superior se tiene controlada la posibilidad que $\bar{\theta}(\mathbf{X})$ esté por debajo de θ , ya que esto sólo puede suceder con probabilidad α , el riesgo no controlado es que $\bar{\theta}(\mathbf{X})$ sobrevalúe θ muy por encima de lo necesario. Esta sobrevaluación que la llamaremos $C(\mathbf{X}, \theta)$ estará dada por

$$C(\mathbf{X}, \theta) = \begin{cases} \bar{\theta}(\mathbf{X}) - \theta & \text{si } \bar{\theta}(\mathbf{X}) > \theta \\ 0 & \text{si } \bar{\theta}(\mathbf{X}) \leq \theta \end{cases}$$

Luego parece razonable buscar cotas superiores que minimicen $E_{\theta}(C(\mathbf{X}, \theta))$ uniformemente en θ .

Del mismo modo en el caso de cotas inferiores, se puede definir la subvaluación por

$$D(\mathbf{X}, \theta) = \begin{cases} \theta - \underline{\theta}(\mathbf{X}) & \text{si } \theta > \underline{\theta}(\mathbf{X}) \\ 0 & \text{si } \theta \leq \underline{\theta}(\mathbf{X}) \end{cases}$$

y en este caso interesará minimizar $E_{\theta}(D(\mathbf{X}, \theta))$ uniformemente en θ .

La teoría de la optimalidad de las cotas de confianza se deriva de la teoría de optimalidad de los tests y por lo tanto se pospone hasta el Capítulo 6.

Solamente diremos que contrariamente a lo que sucedía con intervalos de confianza, existen en casos no triviales cotas uniformemente óptimas. Por ejemplo, los procedimientos derivados en el Ejemplo 1 tienen esta propiedad. En el caso del Ejemplo 2, no existen procedimientos uniformemente óptimos.

De todos modos los procedimientos derivados en ese ejemplo son uniformemente óptimos si se restringe al conjunto de procedimientos insesgados. (Una cota es insesgada si su intervalo de confianza unilateral asociado es una región de confianza insesgada.)

REFERENCIAS

1. Lehmann, E.L. (1994) *Testing Statistical Hypothesis*. Chapman and Hall.
2. Pratt, E. (1961) Length of Confidence Intervals, *J. Amer. Statist. Assoc.* 16: 243–258.
3. Tate, R.F. y Klett, G.W. (1959) Optimal Confidence Intervals for the variance of a Normal Distribution, *J. Amer. Statist. Assoc.* 54: 674–682.
4. Wilks, S.S. (1962) *Mathematical Statistics*, J. Wiley and Sons.